SECTIONS
AGRANDISSEMENT – REDUCTION

* * * * * * * * * * * *

A - SECTIONS D'UN PAVE DROIT PAR UN PLAN

La section d'un pavé droit par un plan (P) parallèle à une face est un rectangle.
La section d'un pavé droit par un plan (P) parallèle à une arête est un rectangle.

B - SECTIONS D'UN CYLINDRE PAR UN PLAN

La section d'un cylindre de rayon *R* par un plan (*P*) perpendiculaire à l'axe est un disque de rayon *R* dont le centre appartient à l'axe.
La section d'un cylindre par un plan (*P*) parallèle à l'axe est un rectangle.

C - SECTION D'UNE PYRAMIDE ET D'UN CONE

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone qui est une réduction du polygone de base.

La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque qui est une réduction du disque de base.

D - AGRANDISSEMENT - REDUCTION

Si, au cours d'un agrandissement ou d'une réduction, les dimensions d'une figure sont toutes multipliées par un même nombre k, alors :

- **les aires sont multipliées par k^2**
- **les volumes sont multipliés par k^3**

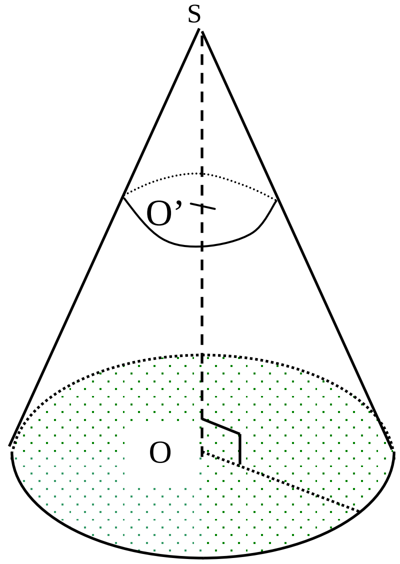
E COMMENT REDIGER

Enoncé :

On réalise la section d'un cône de hauteur OS = 6 cm par un plan parallèle à la base tel que SO' = 2 cm.On donne le volume du grand cône : V = 43,2 cm ^{3}

Et l'aire de la base A = 21,6 cm².

1. Quelle est la nature de la section ?
2. Calculer le volume V' du petit cône et l'aire A' de sa base.



Solution :

1. **La section obtenue est un disque** de centre O’. En effet, la section d’un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque qui est une réduction du disque de base.

2. Le cône de sommet S et de hauteur SO’ est une réduction du cône de sommet S et de hauteur OS.

   Le coefficient de réduction est : $k = \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

   Le petit cône étant une réduction du grand cône dans le rapport $\dfrac{1}{3}$, donc :

$$V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V = \frac{1}{27} \times 43{,}2 = 1{,}6$$

Le volume du petit cône est 1,6 cm^3.

$$A' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times A = \frac{1}{9} \times 2{,}6 = 24$$

L’aire du petit cône est 2,4 cm².

* *

Exercices d’entraînement

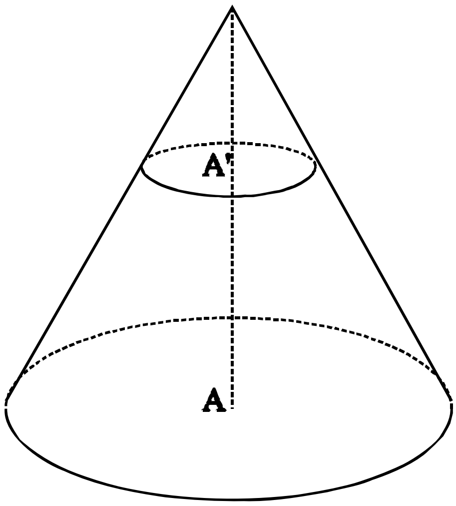
Exercice n°1 : Brevet Juin 2005: Groupe Nord – Exercice n°3

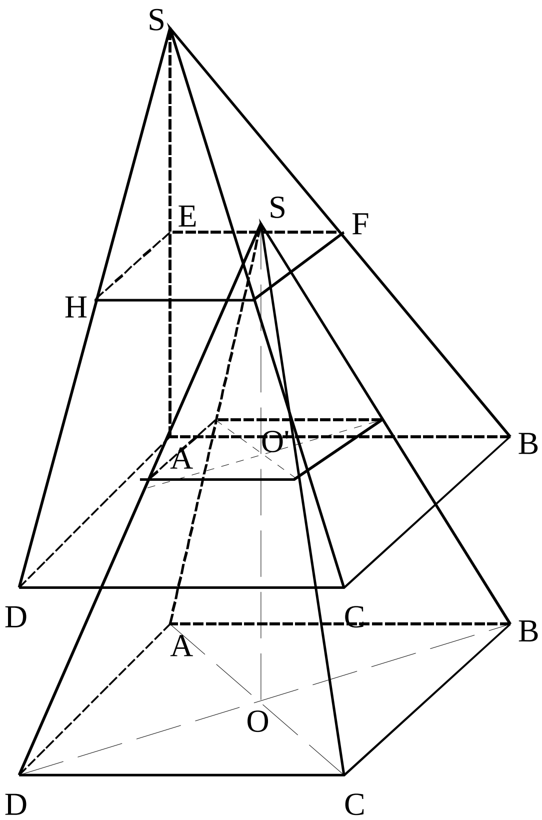
Sur la figure ci-contre, no a un cône de révolution tel que SA = 12 cm.
Un plan parallèle à la base coupe ce cône tel que SA’ = 3 cm (*la figure ci-contre n’est pas à l’échelle*).

1. Le rayon du disque de base du grand cône est de 7 cm. Calculer la valeur exacte du volume du grand cône.

2. Quel est le coefficient de réduction qui permet de passer du grand cône au petit cône ?

3. Calculer la valeur exacte du volume de ce petit cône, puis en donner la valeur arrondie au cm^3 .





Exercice n°2 : Brevet Septembre 2004: Groupe Est – Exercice n°3

La figure ci-contre représente une pyramide *P* de sommet S.
Sa base est un carré ABCD tel que AB = 6 cm ; sa hauteur [SA] est telle que SA = 9 cm.

1. Calculer le volume de cette pyramide *P* .

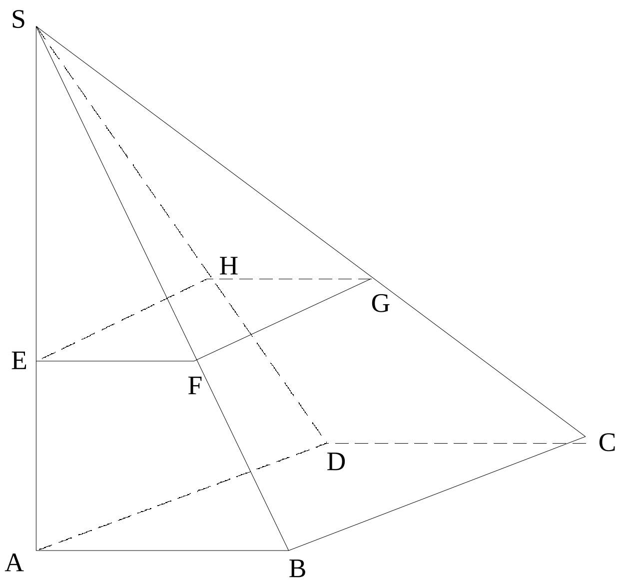
2. E est un point de [SA] défini par SE = 6 cm ; EFGH est la section de la pyramide *P* par un plan parallèle à sa base ; la pyramide P_1 des sommet S et de base EFGH est donc une réduction de la pyramide *P* ; calculer le coefficient *k* de cette réduction.

3. Calculer le volume de la pyramide P_1.

Exercice n°3 : Brevet Groupe sud 2007:Exercice n°2

Pour la pyramide SABCD ci-contre :
La base est le rectangle ABCD de centre O ; AB = 3 cm et BD = 5 cm ;
La hauteur [SO] mesure 6 cm.

1. Montrer que AD = 4 cm.
2. Calculer le volume de la pyramide SABCD en cm^3.
3. Soit O’ le milieu de [SO]. On coupe la pyramide par un plan passant par O’ et parallèle à sa base.
   - **a.** Quelles est la nature de la section A’B’C’D’ obtenue ?
   - **b.** La pyramide SA’B’C’D’ est une réduction de la pyramide SABCD. Donner le rapport de cette réduction.
   - **c.** Calculer le volume de la pyramide SA’B’C’D’.

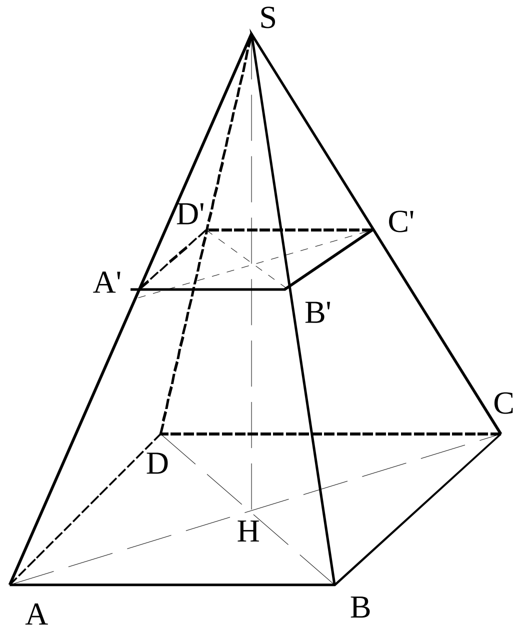


Exercice n°4 : Brevet Amérique du nord Juin 2007:Exercice n°2

SABCD est une pyramide à base rectangulaire ABCD, de hauteur [SA]. On donne SA = 15 cm, AB = 8 cm et BC = 11 cm.

1. Calculer le volume V_1 de la pyramide SABCD.
2. Démontrer que SB = 17 cm.
3. On note E le point de [SA] tel que SE = 12 cm et F le point de [SB] tel que SF = 13,6 cm. Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
4. On coupe cette pyramide par le plan passant par E et parallèle à la base de la pyramide. La pyramide SEFGH, ainsi obtenue, est une réduction de la pyramide SABCD.
   - **a.** Quel est le coefficient de cette réduction ?
   - **b.** En déduire le volume V_2 de la pyramide SEFGH en fonction de V_1 .

Exercice n°5 : Brevet Centres Etrangers (Bordeaux) Juin 2005 :Exercice n°2

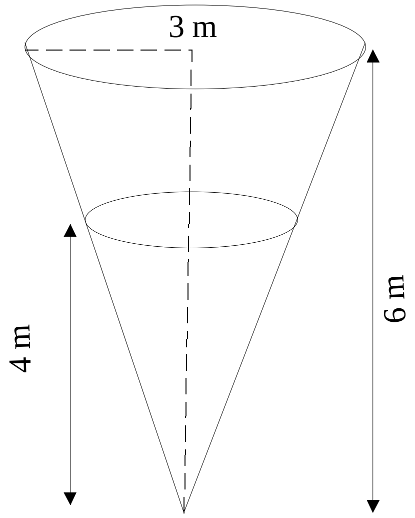


Sur la figure ci contre, SABCD est une pyramide à base rectangulaire, de hauteur [SH], où H est le centre du rectangle ABCD. On donne : AB = 8 cm, BC = 6 cm et SH = 12 cm.

1. Calculer AC ; en déduire AH.
2. Calculer le volume de la pyramide SABCD.
3. Démontrer que SA = 13 cm.
   On note A’ le point de [AS] tel que SA’ = 3,25. On coupe la pyramide par le plan parallèle à la base et passant par A’. On obtient une petite pyramide SA’B’C’D’.
4. **a.** Calculer le coefficient de réduction de SA’B’C’D’ par rapport à SABCD.
   - **b.** En déduire les longueurs A’B’ et B’C’ puis le volume de SA’B’C’D’.

5. Où aurait-il fallu placer A’ pour obtenir une pyramide dont le volume est huit fois plus petit que celui de la pyramide SABCD ? Justifier.

Exercice n°6 : Brevet Centres Etrangers (Bordeaux) Juin 2004 :Exercice n°1



Un bassin a la forme d'un cône qui a pour base un disque de 3 m de rayon, et pour hauteur 6 m.

1.a. Montrer que le volume exact V, en m ^{3} , est égal à 18π, en donner l'arrondi au m ^{3} .

b. Ce volume représente-t-il plus ou moins 10 000 litres ?

2. **a.** Combien de temps faudrait-il à une pompe débitant 15 litres par seconde pour remplir complètement ce bassin ? Donner le résultat arrondi à la seconde.

b. Cette durée est-elle inférieure à 1 heure ?

3. On remplit ce bassin avec de l'eau sur une hauteur de 4 m. On admet que l'eau occupe un cône qui est une réduction du bassin.

a. Quel est le coefficient de la réduction ?

b. En déduire le volume d'eau exacte V' contenu dans le bassin .

CORRIGE

Exercice n°1 :

1. Calcul du volume du grand cône

Soit V le volume du grand cône, on a : $V = \frac{\pi \times r^2 \times SA}{3} = \frac{\pi \times 7^2 \times 12}{3} = 196\pi$

Conclusion : La valeur exacte du volume du grand cône est 196π cm^3

2. Calcul du coefficient de réduction

Soit k le coefficient de réduction, on a : $k = \frac{SA'}{SA} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Conclusion : Le coefficient de réduction est $\frac{1}{4}$.

3. Calcul du volume du petit cône

Soit V' le volume du petit cône.

Le petit cône est une réduction du grand cône dans le rapport $\frac{1}{4}$, donc :

$$V' = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times V = \frac{1}{64} \times 196\pi = \frac{196}{64}\pi = \frac{49}{16}\pi$$

Conclusion : La valeur exacte du petit cône est $\frac{49}{16}\pi$ cm^3 et sa valeur approchée est environ 10 cm^3

Exercice n°2 :

1. Calcul du volume de la pyramide *P.*

Soit V le volume de la pyramide, on a : $V = \frac{1}{3} \times AB^2 \times SA = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 9 = 108$

Conclusion : Le volume de la pyramide P est 108 cm^3

2. Calcul du coefficient de réduction

Soit *k* le coefficient de réduction, on a : $k = \frac{SE}{SA} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Conclusion : Le coefficient de réduction est $\frac{2}{3}$.

3. Calcul du volume de la pyramide P_1

Soit V' le volume de cette pyramide.

La pyramide P_1 est une réduction de la pyramide *P* dans le rapport $\frac{2}{3}$, donc :

$V' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times V = \frac{8}{27} \times 108 = 32$

Conclusion : Le volume de la pyramide P_1 est 32 cm^3

Exercice n°3.

1. Calcul de AD

Comme le quadrilatère ABCD est un rectangle, le triangle ABD est rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
DB^2 = AD^2 + AB^2
5^2 = AD^2 + 3^2
25 = AD^2 + 9
AD^2 = 25 – 9
AD^2 = 16
AD = $\sqrt{16}$
AD = 4

Conclusion: AD = 4 cm

2. Calcul du volume de la pyramide SABCD

Soit *V* le volume de la pyramide, on a : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

$V = \frac{1}{3} \times AB \times AD \times SO = \frac{1}{3} \times 3 \times 4 \times 6 = 24$

Conclusion : Le volume de la pyramide est 24 cm^3

3. a. Nature de la section A'B'C'D'

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone qui est une réduction du polygone de base. Donc A'B'C'D' est un rectangle.

b. Calcul du rapport de réduction

Soit *k* le rapport de réduction, on a : $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Soit *V'* le volume de la pyramide SA'B'C'D', on a : $V' = V' = k^3 \times V = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 24 = \frac{1}{8} \times 24 = 3$

Conclusion : Le volume de la pyramide SA'B'C'D' est 3 cm^3

Exercice n°4.

1. Calcul du volume de la pyramide SABCD

Soit V_1 le volume de la pyramide, on a : $V_1 = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

$V = \frac{1}{3} \times AB \times BC \times SA = \frac{1}{3} \times 8 \times 11 \times 15 = 440$

Conclusion : Le volume de la pyramide est 440 cm ^{3}

2. Calcul de SB

Dans le triangle SAB rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

SB ^{2} = SA ^{2} + AB ^{2}

SB ^{2} = 15 ^{2} + 8 ^{2}

SB ^{2} = 225 + 64

SB ^{2} = 289

SB = $\sqrt{289}$

SB = 17

Conclusion: SB = 17 cm

3. On a $\frac{SE}{SA} = \frac{12}{15} = 0,8$ et $\frac{SF}{SB} = \frac{13,6}{17} = 0,8$

Sachant que les droites (EA) et (FB) sont sécantes en S, les points S,E,A et les points S, F, B sont alignés dans le même ordre, comme $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB} = 0,8$, alors d'après la réciproque du théroèe de Thalès, les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

4. a) Calcul du coefficient de réduction

Soit k le coefficient de réduction, on a : $k = \frac{SE}{SA} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

Conclusion : Le coefficient de réduction est $\frac{4}{5}$.

b) Calcul du volume V_2 de la pyramide

Soit V_2 le volume de cette pyramide.

$V_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times V_1 == \frac{64}{125} \times 440 = 225,28$

Conclusion : Le volume de la pyramide est 225,28 cm ^{3}

Exercice n°5.

1. Calcul de AC

Comme le quadrilatère ABCD est un rectangle, le triangle ABC est rectangle en B.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

AC ^{2} = AB ^{2} + BC ^{2}

AC ^{2} = 8 ^{2} + 6 ^{2}

AC ^{2} = 64 + 36

AC ^{2} = 100

AC = $\sqrt{100}$

AC = 10

Conclusion: AC = 10 cm

Calcul de AH

Comme dans un rectangle les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur, alors :

AH = $\frac{1}{2} \times AC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$.

Conclusion: AH = 5 cm

2. Calcul du volume de la pyramide SABCD

Soit V le volume de la pyramide, on a : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

$$V = \frac{1}{3} \times AB \times BC \times SH = \frac{1}{3} \times 8 \times 6 \times 12 = 192$$

Conclusion : Le volume de la pyramide est 192 cm ^{3}

3. Calcul de SA

Dans le triangle SHA rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AS^2 = AH^2 + HS^2$

$AS^2 = 5^2 + 12^2$

$AS^2 = 25 + 144$

$AS^2 = 169$

$AS = \sqrt{169}$

AS = 13

Conclusion: AS = 13 cm

4. a) Calcul du coefficient de réduction

Soit k le coefficient de réduction, on a : $k = \frac{SA'}{SA} = \frac{3{,}25}{13} = 0{,}25$

Conclusion : Le coefficient de réduction est 0,25.

b) Calcul de A'B' et B'C'

On a : A'B' = AB × 0,25 = 8 × 0,25 = 2 Conclusion: A'B'= 2 cm

On a : B'C' = BC × 0,25 = 6 × 0,25 = 1,5 Conclusion: B'C'= 1,5 cm

Calcul du volume de la pyramide SA'B'C'D'

Soit V' le volume de cette pyramide.

La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD dans le rapport 0,25, donc :

$$V' = (0{,}25)^3 \times V = (0{,}25)^3 \times 192 = 3$$

Conclusion : Le volume de la pyramide est 3 cm^3

5. cherchons le nombre par lequel il faut multiplier l'arête latérale de la pyramide pour que son volume soit divisé par 8 :

On a $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Il faut donc multiplier par 0,5

A' doit être donc placer à la moitié du segment [SA]

Exercice n°6.

1. a) Calcul du volume du cône

Soit V le volume du cône, on a : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6 = 18\pi$

Conclusion : Le volume exacte du cône est 18π cm ^{3}
Le volume arrondi au cm ^{3} près est 57 m ^{3}

b) 1 L = 1dm ^{3}
10 000 L = 10 000 dm ^{3}
10 000 L = 10 m^3
Le volume représente plus de 10 000 L.

2. a) On a : 57 m ^{3} = 57 000 L
et 57 000 : 15 = 3 800
Il faudra environ 3 800 secondes pour remplir le bassin.

b) Comme 1 h = 3 600 s, La durée est donc supérieure à 1 heure.

3. a) Calcul du coefficient de réduction

Soit k le coefficient de réduction, on a : $k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Conclusion : Le coefficient de réduction est $\frac{2}{3}$.

b) Calcul du volume d'eau exacte V' contenu dans le bassin.
Soit V' le volume du cône réduis.

$V' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times V = \frac{8}{27} \times 2\pi = \frac{8 \times 2 \times 9 \times \pi}{3 \times 9} = \frac{16}{3}\pi$

Conclusion : Le volume d'eau est $\frac{16}{3}\pi$ m^3