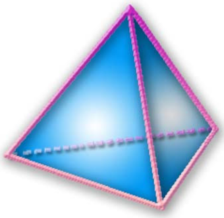

PGCD DE DEUX NOMBRES ENTIERS

* *

Le PGCD

Les diviseurs communs aux nombres *a* et *b* sont les nombres qui divisent à la fois *a* et *b*.
Le Plus Grand Commun Diviseur de deux nombres *a* et *b* est appelé **PGCD de *a* et *b*.**
On le note : **PGCD (*a* ; *b*)**

Exemple : Le PGCD des nombres 40 et 100 est 20 . On écrit **PGCD (40 ; 100) = 20**

NOMBRES PREMIERS ENTRE-EUX

Deux nombres entiers (non nuls) sont premiers entre eux si leur **PGCD est égal à 1**

Exemple : **PGCD (45 ; 14) = 1 , donc 45 et 14 sont premiers entre eux.**

CALCULER UN PGCD EN UTILSANT L'ALGORITHME DES DIFFERENCES

Exemple : Recherche du PGCD de 2 940 et 735.

On remplace le grand des deux par leur différence

- PGCD (2 940 ; 735) = PGCD (**2 205** ; 735) — **2 940 – 735**
- PGCD (2 205 ; 735) = PGCD (**1 470** ; 735) — **2 205 -735**
- PGCD (1 470 ; 735) = PGCD (**735** ; 735) — **1 470 - 735**

On recommence le procédé jusqu'à obtenir deux nombres égaux.

Conclusion : **PGCD (2 940 ; 735) = 735**

Ne pas oublier de conclure

CALCULER UN PGCD EN UTILSANT L'ALGORITHME D'EUCLIDE (Ou divisions successives)

Propriété : Si *a* et *b* sont deux nombres entiers non nuls tels que $a > b$, alors
PGCD (*a* ; *b*) = PGCD (*b* ; *r*) , ou *r* est le reste de la **division Euclidienne** de *a* par *b*.

Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est **le dernier reste non nul**

Exemple : Déterminer le PGCD de 1 053 et 325

① On effectue la division Euclidienne du plus grand des deux nombres par le plus petit.
② On renouvelle la première étape en considérant le reste et le diviseur de la division précédente et ainsi de suite jusqu'à obtenir un reste nul. ③

①

1 053	325
78	3

②

325	78
13	4

③

78	13
0	6

Conclusion : **PGCD (1 053 ; 325) = 13**

Ne pas oublier de conclure

FRACTION IRREDUCTIBLE

Définition : Une fraction $\frac{a}{b}$ est dire **irréductible** lorsque le **PGCD (a ; b) = est égal à 1**.

Propriété : Pour rendre une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, on divise le numérateur a et son dénominateur b par le PGCD de a et b .

Exemples : On sait que PGCD (1 053 ; 325) = 13 Donc $\frac{1053}{325} = \frac{81 \times 13}{25 \times 13} = \frac{81}{25}$

La forme irréductible de la fraction $\frac{1053}{325}$ est $\frac{81}{25}$

* *

Exercices d'entraînement

Exercice n°1 : Brevet Juin 2005 : Groupe Sud – Exercice n°4

1. Trouver le PGCD de 6 209 et 4 435 en détaillant la méthode.

2. En utilisant le résultat de la question précédente, expliquer pour quoi la fraction $\frac{4435}{6209}$ n'est pas irréductible.

3. Donner la fraction irréductible égale à $\frac{4435}{6209}$.

Exercice n°2 : Brevet Juin 2005 : Centres Etrangers (Nice) – Exercice n°1

1. 288 et 224 sont-ils premiers entre eux ? Expliquer pourquoi.

2. Déterminer le PGCD de 288 et 224.

3. Ecrire la fraction $\frac{224}{288}$ sous forme irréductible.

4. Un photographe doit réaliser une exposition en présentant ses œuvres sur des panneaux contenant chacun le même nombre de photos de paysage et le même nombre de portraits. Il dispose de 224 photos de paysage et de 288 portraits.

Combien peut-il réaliser au maximum de panneaux en utilisant toutes les photos ?

Combien chaque panneau contient-il de paysages et de portraits ?

Exercice n°3 : Brevet Juin 2005 : Groupe Est – Exercice n°3

1. Calculer le PGCD des nombres 135 et 210.

2. Dans une salle de bain, on veut recouvrir le mur situé au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres de plus grand possible.

a. Déterminer la longueur, en cm, du côté d'un carreau, sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur.

b. Combien faudra-t-il alors de carreaux ?

Exercice n°4 : Brevet Juin 2005 : Groupe Nord – Exercice n°3

Un pâtissier de 411 framboises et de 685 fraises. Afin de préparer des tartelettes, il désire répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques.

1. Calculer le nombre de tartelettes.

2. Calculer le nombre de framboises et de fraise dans chaque tartelette.

CORRIGE

Exercice n°1 : **1.** En utilisant la méthode des divisions successives, on a :

$$\begin{array}{r|l} 6\,209 & \underline{4\,435} \\ 1\,774 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4\,435 & \underline{1\,774} \\ \mathbf{887} & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,774 & \underline{887} \\ 0 & 2 \end{array}$$

PGCD (3 209 ; 4 435) = 887

2. Comme PGCD (3 209 ; 4 435) = 887, alors les nombres 4 435 et 6 209 ne sont donc pas premiers entre eux

Et ainsi la fraction $\dfrac{4435}{6209}$ n'est pas irréductible.

3. On a : $\dfrac{4435}{6209} = \dfrac{887 \times 5}{887 \times 7} = \dfrac{5}{7}$.

La fraction irréductible de $\dfrac{4435}{6209}$ est $\dfrac{5}{7}$

Exercice n°2 : Brevet Juin 2005 : Centres Etrangers (Nice) – Exercice n°1

1. Les nombres 288 et 224 sont paires donc divisibles par 2.
Le PGCD étant donc différent de 1, les nombres 288 et 224 ne sont donc pas premiers entre eux.

2. En utilisant la méthode des divisions successives, on a :

$$\begin{array}{r|l} 288 & \underline{224} \\ 64 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 224 & \underline{64} \\ 32 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 64 & \underline{32} \\ 0 & 2 \end{array}$$

PGCD (28 ; 224) = 32

3. On a $\dfrac{224}{288} = \dfrac{32 \times 7}{32 \times 9} = \dfrac{7}{9}$

La fraction irréductible de $\dfrac{224}{288}$ est $\dfrac{7}{9}$

4. D'après la question **2.** ,il pourra réaliser 32 panneaux..
D'après la question **3.** , il y a dans chaque panneau 7 photos de paysages et 9 photos de portraits.

Exercice n°3 :

1. En utilisant la méthode des divisions successives, on a :

$$\begin{array}{r|l} 210 & \underline{135} \\ 75 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 135 & \underline{75} \\ 60 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & \underline{60} \\ \mathbf{15} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & \underline{15} \\ 0 & 4 \end{array}$$

PGCD (210 ; 135) = 15

2. a. D'après la question précédente, la longueur du côté d'un carreau mesure 15 cm.
b. Soit n le nombre de carreaux. On a : $210 = 15 \times 14$ et $135 = 15 \times 9$
et $n = 9 \times 14 = 126$

Il faudra 126 carreaux.

Exercice n°4 : **1.** Calcul du Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de 685 et de 411.
En utilisant la méthode des divisions successives, on a :

$$\begin{array}{r|l} 685 & \underline{411} \\ 274 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 411 & \underline{274} \\ \mathbf{137} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 274 & \underline{137} \\ 0 & 2 \end{array}$$

PGCD (685 ; 411) = 137
Le pâtissier pourra préparer 137 tartelettes.

2. On a : $685 = 137 \times 5$ et $411 = 137 \times 3$
Dans chaque tartelettes, il y aura 5 fraises et 3 framboises