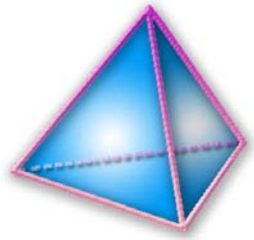

STATISTIQUES

* * * * * * * * * * * *
* *

A – MEDIANE : Une caractéristique de position

Définition : **La médiane *m* d'une série statistique est la valeur du caractère qui partage la population de la série en deux parties d'effectifs égaux :**

- **l'une contient les individus pour lesquels le caractère à une valeur supérieure à *m*.**
- **l'autre contient les individus pour lesquels le caractère a une valeur inférieure à *m*.**

Remarque : La moyenne est une caractéristique de position.

Déterminer la valeur médiane d'une série sur des observations individuelles.

Enoncé 1 : *Voici les tailles, exprimées en mètres, des quinze membres d'un club de basket :*

1,81 ; 1,91 ; 1,95 ; 1,90 ; 1,94 ; 1,81 ; 1,94 ; 1,95 ; 1,89 ; 1,94 ; 2,01 ; 1,93 ; 1,94 ; 1,83 ; 1,90

Donne la médiane de cette série.

Méthode :

On range les valeurs par ordre croissant :

1,81 – 1,81 – 1,83 – 1,89 - 1,90 – 1,90 – 1,91 – 1,93– 1,94 –1,94 –1,94 – 1,94 – 1,95 – 1,95 – 2,01

Celui du « milieu » est le 8 éme. Sa taille est égale à 1,93 m.

La médiane de la série des tailles est 1,93

Cela signifie qu'à partir de 1,93 m , on est assuré d'avoir englobé la moitié de l'effectif.

Enoncé 2: *On a relevé la portée, en mètres, de huit téléphone sans fil de marques différentes :*

170 ; 300 ; 260 ; 120 ; 200 ; 180 ; 120 ; 120.

Donne une valeur médiane de cette série.

Méthode :

On range les valeurs par ordre croissant :

120 – 120 – 120 – 170 – 180 – 200 – 260 - 300

Il y a un nombre pair de valeurs, puisqu'il y en a huit.

On retient la quatrième et la cinquième valeurs : 170 et 180

Tout nombre compris entre 170 et 180 est une valeur médiane. On prend généralement la moyenne des deux, soit $\frac{170+180}{2}$ = 175 (mètres).

B – ETENDUE : Une caractéristique de dispersion.

Définition : **L'étendue d'une série est la différence des valeurs extrêmes observées du caractère.**

Exemple : *On donne les notes, sur 10, de deux groupes de 10 élèves lors d'un devoir en classe.*

Groupe A : 03 - 06 - 04 - 04 - 06 - 07 - 08 - 05 - 06 - 07
Groupe B : 05 - 06 - 04 - 06 - 05 - 04 - 07 - 05 - 06 - 06

L'étendue du groupe A est 5 car $8 - 3 = 5$
L'étendue du groupe B est 3 car $7 - 4 = 3$
A priori, les notes du groupe A sont plus dispersées que celles du groupe B.

C – QUARTILES

Définition :

• Le premier quartile Q_1 d'une série ordonnée dans l'ordre croissant est la plus petite valeur de la série pour laquelle on obtient le quart de l'effectif : au moins 25 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_1.

• Le troisième quartile Q_3 d'une série ordonnée dans l'ordre croissant est la plus petite valeur de la série pour laquelle on obtient les trois quarts de l'effectif : au moins 75 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_3.

• La différence $Q_3 - Q_1$ s'appelle écart interquartile.

Remarque : La médiane est le second quartile : au moins 50% des valeurs de la série sont inférieures ou égales à la médiane.

Détermination des quartiles :

Pour déterminer Q_1, on calcule le quart de l'effectif : $\frac{1}{4} \times \text{effectif}$

→ Si le résultat est entier , on prend la valeur correspondante.
→ Si le résultat n'est pas un entier, on arrondit à la valeur entière par excès.

Pour déterminer Q_3, on calcule les trois quarts de l'effectif : $\frac{3}{4} \times \text{effectif}$

→ Si le résultat est entier, on prend la valeur correspondante.
→ Si le résultat n'est pas un entier, on arrondit à la valeur entière par excès.

Exemple 1 :
Enoncé : Déterminer l'écart interquartile de la série : 10 ; 6 ; 16 ; 14 ; 26 ; 30 ; 6 ; 4 ; 16 ; 22 ; 24 ; 38 ; 12

Solution :
Etape ① : On range dans l'ordre croissant :
4 ; 6 ; 6 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 16 ; 22 ; 24 ; 26 ; 30 ; 38
L'effectif de cette série est 13

Etape ② : On détermine le premier quartile Q_1 : On calcule $\frac{1}{4}\times 13$

On a : $\frac{1}{4}\times 13 = \frac{13}{4} = 3{,}25$. On arrondi à l'entier par excès, soit 4.

Q_1 est la 4ème valeur de la série.

Donc : $Q_1 = 10$

Etape③ : On détermine le troisième quartile Q_3 : On calcule $\frac{3}{4}\times 13$

On a : $\frac{3}{4}\times 13 = \frac{39}{4} = 9{,}75$. On arrondi à l'entier par excès, soit 10.

Q_3 est la 10ème valeur de la série.

Donc : $Q_3 = 24$

Etape ④ : On détermine l'interquartile en calculant $Q_3 - Q_1$

$Q_3 - Q_1 = 24 - 10 = 14$

Exemple 2 :

Enoncé : On a relevé la pointure des élèves de troisième d'un collège.

Pointure	35	36	37	38	39	40	41	42
Effectifs	2	21	17	19	13	4	3	1

1° Détermine la moyenne

2° Recopie le tableau et complète par la ligne des effectifs cumulés croissants.

3° Détermine la médiane et interprète le résultat.

4° Détermine les quartiles et interprète le résultat.

Solution :

1° L'effectif total de la série statistique est 80 (2 + 21 + 17 + 19 + 13 + 4 + 3 + 1 = 80).

Soit m la moyenne, on a :

$$m = \frac{35\times 2 + 36\times 21 + 37\times 17 + 38\times 19 + 39\times 13 + 40\times 4 + 41\times 3 + 42\times 1}{80} = \frac{3009}{80} \approx 37{,}61$$

Conclusion : La pointure moyenne est environ 37,6.

2° Tableau des effectifs cumulés croissants :

Pointure	35	36	37	38	39	40	41	42
Effectifs	2	21	17	19	13	4	3	1
Effectifs cumulés croissants	2	23	40	59	72	76	79	80

3° Détermination de la médiane

Il y a un nombre pair de valeurs, c'est-à-dire 80.

La médiane est la moyenne entre les 40e et 41e valeurs.

La 40e valeur est 37 et la 41e valeur est 38

On a donc $\frac{37+38}{2} = 37{,}5$.

La médiane est 37,5.

La moitié des élève ont une pointure inférieure à 37,5 et l'autre moitié supérieure à 37,5

4° Détermination des quartiles

Pour le premier quartile Q_1 : On calcule $\frac{1}{4}\times 80$

On a : $\frac{1}{4}\times 80=\frac{80}{4}=20$.

Q_1 est la 20^e valeur de la série.

Donc : $Q_1 = 36$

Au moins $\frac{1}{4}$ des élèves ont une pointure inférieure ou égale à 36

Pour le troisième quartile Q_3 : On calcule $\frac{3}{4}\times 80$

On a : $\frac{3}{4}\times 80=\frac{240}{4}=60$.

Q_3 est la 60^e valeur de la série.

Donc : $Q_3 = 39$

Au moins $\frac{3}{4}$ des élèves ont une pointure inférieure ou égale à 39

* *

Exercices d'entraînement

Exercice n°1 : Brevet Centres étrangers (Bordeaux), juin 2009 : Exercice n°3

Durant une compétition d'athlétisme, les 7 concurrents ont couru les 200 m avec les temps suivants (en secondes) : 20,25 ; 20,12 ; 20,48 ; 20,09 ; 20,69 ; 20,19 et 20,38

1. Quelle est l'étendue de cette série ?
2. Quelle est la moyenne de cette série (arrondie au centième) ?
3. Quelle est la médiane de cette série ?
4. Quelle est la vitesse moyenne de l'athlète classé premier, en mètres par seconde (m/s), (arrondie au millième) ?

Exercice n°2 : Brevet Asie, juin 2009 : Exercice n°2

Dans un collège, une enquête a été menée sur « le poids des cartables des élèves ».
Pour cela, on a pesé le cartables de 48 élèves du collège.
Les résultats de cette enquête sont inscrits dans le tableau ci-dessous :

Poids en kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	1	2	4	2	5	11	8	8	3	4

1. Calculer l'étendue de cette série statistique.
2. Déterminer la médiane de cette série statistique.
3. Déterminer, les valeurs du premier quartile et du troisième quartile de la série.
4. Une personne affirme : « Plus des trois quarts des 48 élèves viennent en cours avec un cartable qui pèse 5 kg ou plus ». A-t-elle raison ? Justifier votre réponse.

Exercice n°3 : Sujet type 2009 : Exercice n°2

Dans une classe de 26 élèves, les résultats suivants ont été obtenus à un devoir :

Notes	6	7	9	10	11	12	14	15	16	19
Effectifs	3	4	4	2	1	3	2	4	1	2

1. **a.** Calculer la moyenne de ce devoir.
   b. Calculer la fréquence des élèves de la classe qui ont eu une note supérieure ou égale à la moyenne. Le résultat sera arrondi au centième près.
2. Calculer l'étendue de cette série de notes.

3. Déterminer la note médiane.
4. a. Déterminer Q_1 et Q_3 , les valeurs du premier et troisième quartile de la série.
b. Calculer le pourcentage d'élèves ayant une note inférieure ou égale à Q_3 . Le résultat sera arrondi au dixième.

CORRIGE

Exercice n°1 :

Durant une compétition d'athlétisme, les 7 concurrents ont couru les 200 m avec les temps suivants (en secondes) : 20,25 ; 20,12 ; 20,48 ; 20,09 ; 20,69 ; 20,19 et 20,38

1. Quelle est l'étendue de cette série ?

Le plus petit temps est 20,09
Le plus grand temps est 20,69
On a : 20,69 – 20,09 = 0,6
Conclusion : l'étendu est 0,6

2. Quelle est la moyenne de cette série (arrondie au centième) ?

Soit m la moyenne, on a : $m = \dfrac{20{,}25+20{,}12+20{,}48+20{,}09+20{,}69+20{,}19+20{,}38}{7} = \dfrac{142{,}2}{7} \approx 20{,}31$.

La moyenne de cette série est 20,31 s

3. Quelle est la médiane de cette série ?

On range les valeurs dans l'ordre croissant : 20,09 - 20,12 - 20,19 - 20,25 - 20,38 - 20,48 - 20,69

Comme il y a 7 valeurs, **la médiane** est associée au $4^{\text{ème}}$ élément qui partage la série en deux séries de 3 valeurs, soit la valeur **20,25.**
Conclusion : La médiane de cette série est 20,25

4. Quelle est la vitesse moyenne de l'athlète classé premier, en mètres par seconde (m/s), (arrondie au millième) ?

L'athlète classé le premier à mis un temps de 20,09 pour parcourir 200 m.
Donc pour 1 seconde, on a $\dfrac{200}{20{,}09} \approx 9{,}955$.
La vitesse moyenne de l'athlète classé le premier est de environ 9,955 m/s

Exercice n°2 :

Dans un collège, une enquête a été menée sur « le poids des cartables des élèves ».
Pour cela, on a pesé le cartables de 48 élèves du collège.
Les résultats de cette enquête sont inscrits dans le tableau ci-dessous :

Poids en kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	1	2	4	2	5	11	8	8	3	4

1. Calculer l'étendue de cette série statistique.

Le plus petit poids est 1
Le plus grand poids est 10
On a : 10 – 1 = 9
Conclusion : l'étendu est 9

2. Déterminer la médiane de cette série statistique.

Dressons la ligne des effectifs cumulés croissants :

Poids en kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	1	2	4	2	5	11	8	8	3	4
Effectifs cumulés croissants	1	3	7	9	14	25	33	41	44	48

Il y a un nombre pair de valeurs, c'est-à-dire 48.
La médiane est la moyenne entre les 24^e et 25^e valeurs.
La 24^e valeur est 6 et la 25^e valeur est 6
Donc La médiane est 6.
La moitié des élèves ont un cartable inférieure à 6 kg et l'autre moitié supérieure à 6 kg

3. Déterminer, les valeurs du premier quartile et du troisième quartile de la série.

Pour le premier quartile Q_1 : On calcule $\frac{1}{4}\times 48$

On a : $\frac{1}{4}\times 48 = \frac{48}{4} = 12$.

Q_1 est la 12^e valeur de la série.

Donc : $Q_1 = 5$

Au moins $\frac{1}{4}$ des élèves ont un cartable inférieure ou égale à 5 kg

Pour le troisième quartile Q_3 : On calcule $\frac{3}{4}\times 48$

On a : $\frac{3}{4}\times 48 = \frac{144}{4} = 36$.

Q_3 est la 36^e valeur de la série.

Donc : $Q_3 = 8$

Au moins $\frac{3}{4}$ des élèves ont un cartable inférieure ou égale à 8 kg

4. Une personne affirme : « Plus des trois quarts des 48 élèves viennent en cours avec un cartable qui pèse 5 kg ou plus ». A-t-elle raison ? Justifier votre réponse.

On sait d'après la question 3. qu'au moins $\frac{1}{4}$ des élèves viennent en cours avec un cartable inférieure ou égale à 5 kg. Cela revient à dire que plus des trois quarts des 48 élèves viennent en cours avec un cartable qui pèse 5 kg ou plus.
Donc la personne a raison.

Exercice n°3 :

Dans une classe de 26 élèves, les résultats suivants ont été obtenus à un devoir :

Notes	6	7	9	10	11	12	14	15	16	19
Effectifs	3	4	4	2	1	3	2	4	1	2

1. a. Calculer la moyenne de ce devoir.

Soit m la moyenne, on a :

$$m = \frac{6\times3+7\times4+9\times4+10\times2+11+12\times3+14\times2+15\times4+16+19\times2}{26} = \frac{291}{26} \approx 11{,}2 .$$

La moyenne de ce devoir est environ 11,2

b. Calculer la fréquence des élèves de la classe qui ont eu une note supérieure ou égale à la moyenne. Le résultat sera arrondi au centième près.

Le nombre d'élèves de la classe qui ont eu une note supérieure ou égale à la 11,2 est de 12
(3 + 2 + 4 + 1 + 2 = 12)

Donc **la fréquence est $\frac{12}{26}$ c'est-à-dire environ 0,46**

2. Calculer l'étendue de cette série de notes.

La plus petite note est 6
Le plus grande note est 19
On a : 19 – 6 = 13
Conclusion : l'étendu est 13

2. Déterminer la note médiane.

Dressons la ligne des effectifs cumulés croissants :

Notes	6	7	9	10	11	12	14	15	16	19
Effectifs	3	4	4	2	1	3	2	4	1	2
Effectifs cumulés croissants	3	7	11	13	14	17	19	23	24	26

Il y a un nombre pair de valeurs, c'est-à-dire 26.
La médiane est la moyenne entre les 13^{e} et 14^{e} valeurs.
La 13^{e} valeur est 10 et la 14^{e} valeur est 11

Donc $\frac{10+11}{2} = 10{,}5$

La médiane est 10,5.
La moitié des élèves ont une note inférieure à 10,5 et l'autre moitié supérieure à 10,5

3. a. Déterminer Q_1 et Q_3 , les valeurs du premier et troisième quartile de la série.

Pour le premier quartile Q_1 : On calcule $\frac{1}{4}\times 26$

On a : $\frac{1}{4}\times 26 = \frac{26}{4} = 6{,}5$. On arrondi à l'entier par excès, soit 7.

Q_1 est la 7^{e} valeur de la série.

Donc : $Q_1 = 7$

Au moins $\frac{1}{4}$ des élèves ont une note inférieure ou égale à 7

Pour le troisième quartile Q_3 : On calcule $\frac{3}{4} \times 26$

On a : $\frac{3}{4} \times 26 = \frac{78}{4} = 19,5$. On arrondi à l'entier par excès, soit 20.

Q_3 est la 20^e valeur de la série.

Donc : $Q_3 = 15$

Au moins $\frac{3}{4}$ des élèves ont une note inférieure ou égale à 15

b. Calculer le pourcentage d'élèves ayant une note inférieure ou égale à Q_3 . Le résultat sera arrondi au dixième.

On a : 3 + 4 + 4 + 2 + 1 + 3 + 2 + 4 = 23.

Il y a 23 élèves dont la note est inférieure ou égale à 15.

On a : $\frac{23}{26} \times 100 \approx 88,46$.

Il y a donc environ 88,5 % des élèves ayant obtenue une note inférieure ou égale à 15.