

Le papyrus de Rhind (≈ 1650 av. J.-C.) montre que les Egyptiens n'utilisaient pour leurs calculs, essentiellement administratives et commerciaux, que des fractions de numérateur 1 et dont les dénominateurs étaient des nombres entiers strictement positifs. Ces fractions portent le nom de fractions égyptiennes. Deux exceptions cependant : ils utilisaient $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, qu'ils représentaient par des signes spéciaux.

Ainsi pour exprimer ce qui est, aujourd'hui, la fraction $\frac{3}{5}$, ils utilisaient une décomposition en une somme de fractions égyptiennes distinctes, comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ par exemple.

On se propose, dans cet exercice, de décomposer quelques fractions en une somme de fractions égyptiennes distinctes.

1. a) Vérifie que chacune des égalités suivantes est vraie.

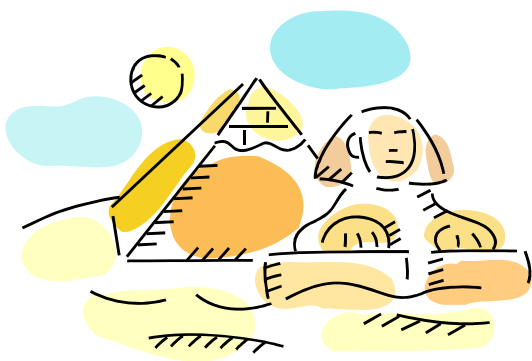
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3} \quad ; \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3 \times 4} \quad ; \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4 \times 5}$$

b) Démontre que, n étant un nombre entier positif non nul :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \times (n+1)}$$

c) En utilisant la question précédente, écrire $\frac{1}{5}$ puis $\frac{1}{6}$ sous la forme d'une somme de deux fractions égyptiennes distinctes.

2. a) Vérifie que : $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$



b) En utilisant la question 1., écris $\frac{2}{3}$ sous la forme d'une somme de quatre fractions égyptiennes distinctes.

c) Démontre que, p étant un nombre entier positif non nul :

$$\frac{2}{3 \times p} = \frac{1}{2 \times p} + \frac{1}{6 \times p}.$$

d) En utilisant la question précédente, écris $\frac{2}{9}$ puis $\frac{2}{15}$ sous la forme d'une somme de deux fractions égyptiennes distinctes.

3. a) Recopie et complète : $\frac{7}{11} = \frac{14}{22} = \frac{11+2+1}{22} = \frac{1}{\dots} + \frac{1}{\dots} + \frac{1}{\dots}$.

b) En utilisant la démarche de la question précédente,

écris $\frac{5}{7}$ sous la forme d'une somme de trois fractions égyptiennes distinctes.

