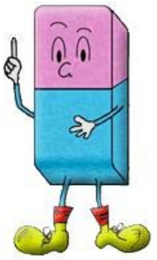
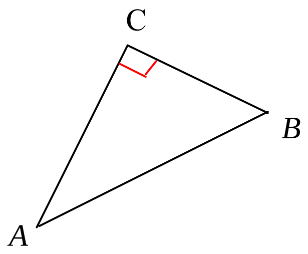


THEME 14 : TRIANGLE RECTANGLE (2) - CERCLE CIRCONSCRIT - MEDIANE - RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE (2)

A - TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT

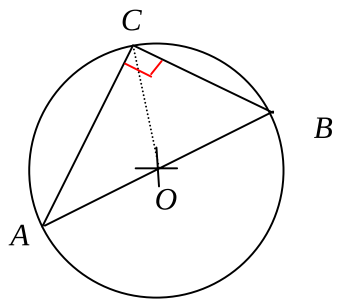
Propriété 1 : **Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit**

Les données (ou hypothèses)



ABC est rectangle en C

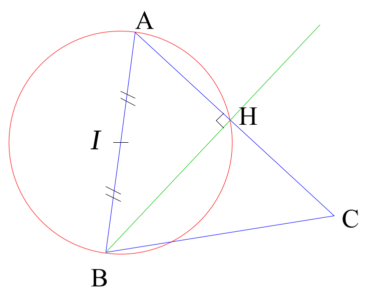
Le résultat (ou conclusion)



[AB] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en C

Conséquence : **Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.**

Exemple 1 : ABC est un triangle, le point I est le milieu du côté [AB]. La hauteur passant par le point B coupe la droite (AC) au point H.
Démontre que le point H appartient au cercle de centre I et de rayon IA.

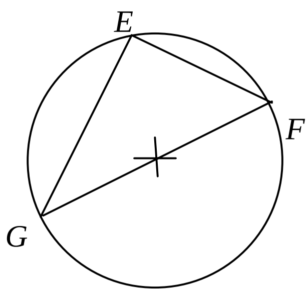


Corrigé :
On sait que : ABC est un triangle et (BH) est la hauteur relative au côté [AC].
Or par définition : Dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.
Donc le triangle BHA est rectangle en H.

On sait maintenant que : BHA est un triangle rectangle en H et le point I est le milieu du côté [AB].
D'après la propriété : **Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.**
Donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABH.
Ainsi, le point H appartient au cercle de centre I et de rayon IB.

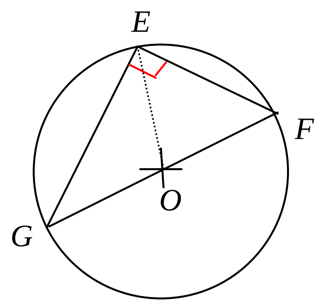
Propriété 2 : **Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle..**

Les données (ou hypothèses)



[FG] est un diamètre du cercle
et E appartient au cercle.

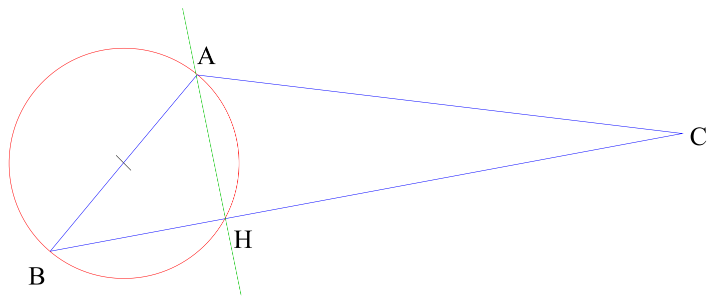
Le résultat (ou conclusion)



Le triangle EFG est rectangle en E.
([FG] est l'hypoténuse).

Exemple2 :

Soit ABC un triangle. Le cercle de diamètre [AB] coupe la droite (BC) en H.
Faire une figure puis démontre que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.



Corrigé :

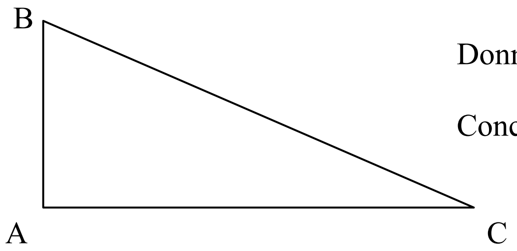
On sait que : le triangle ABH est inscrit dans un cercle de diamètre [AB].
D'après la propriété : **Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.**
Donc le triangle ABH est rectangle en H.

Ainsi les droites (AH) et (BH) sont perpendiculaires et comme le point H appartient à la droite (BC),

Conclusion : (AH) perpendiculaire à (BC)

B - RECIPROQUE DE LA PROPRIETE DE PYTHAGORE

Si, dans un triangle ABC, on a la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle est rectangle en A.



Données : ABC est un triangle

Conclusion : ABC est un triangle rectangle en A.

Remarques : * On peut utiliser la réciproque du théorème de Pythagore pour démontrer qu'un triangle est rectangle.
* Faire des calculs séparés (exemple : BC^2 d'un côté et $AB^2 + AC^2$ d'autre part).

Comment rédiger

ENONCE : Les triangles ci dessous sont-ils rectangles ?

Figure 1

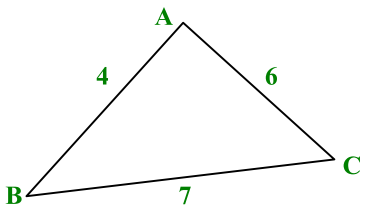
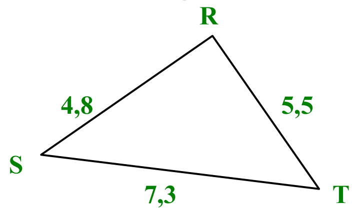


Figure 2



Remarques : *Il s'agit de savoir si le carré du plus long côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Si oui, le triangle est rectangle. Sinon, il ne l'est pas.*

On calcule séparément pour la figure 1 : BC^2 et $AB^2 + AC^2$ et pour la figure 2 : ST^2 et $RS^2 + RT^2$

SOLUTIONS :

Figure 1 Dans le triangle ABC, on a : $BC^2 = 7^2 = 49$

et $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 42$

Ainsi $\boxed{BC^2 \neq AB^2 + AC^2}$

Conclusion : **Si le triangle était rectangle , d'après le théorème de Pythagore, on aurait $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Or, comme $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ le triangle ABC n'est donc pas rectangle.**

Figure 2 Dans le triangle STR, on a: $ST^2 = 7{,}3^2 = 53{,}29$

et $RS^2 + RT^2 = 23{,}04 + 30{,}25 = 53{,}29$

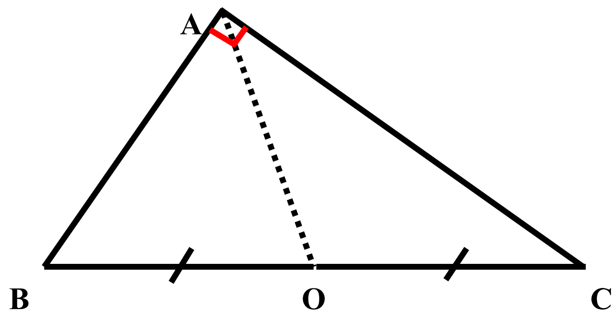
Ainsi $\boxed{ST^2 = RS^2 + RT^2}$

Conclusion : **Comme $ST^2 = RS^2 + RT^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en R.**

C - PROPRIETE CARACTERISTIQUE DE LA MEDIANE D'UN TRIANGLE RECTANGLE

Propriété 1 :

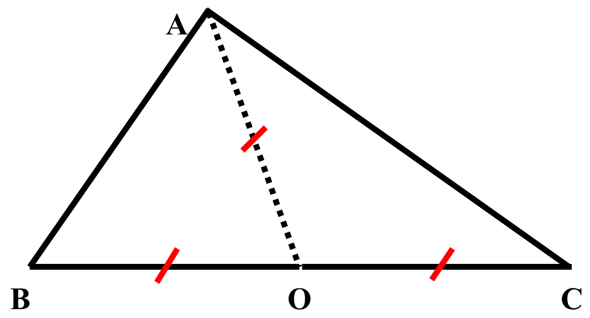
Si un triangle est rectangle alors la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse.



Sachant que ABC est rectangle en A et que O est le milieu de [BC] , on peut dire que $AO = \frac{BC}{2}$

Propriété 2 :

Si dans un triangle la médiane relative à un côté mesure la moitié de ce côté, alors le triangle est rectangle.



Sachant que O est le milieu de [BC] et que $AO = \frac{BC}{2}$ **, on peut dire que ABC est rectangle en A.**