

THEME 5 :

TRIANGLE RECTANGLE (1) - LE THEOREME DE PYTHAGORE

Pour prendre un bon départ

Exercice n°1 :

$$\begin{array}{l}
 5 + x = 12 \quad ; \quad 24 + x = -6 \quad ; \quad x + 8 = 9 \quad ; \quad x + 16 = -18 \quad ; \quad 14 + x = 13 \quad ; \quad 81 + x = -5 \\
 x = 12 - 5 \quad \quad x = -6 - 24 \quad \quad x = 9 - 8 \quad \quad x = -18 - 16 \quad \quad x = 13 - 14 \quad \quad x = -5 - 81 \\
 x = 7 \quad \quad \quad x = -30 \quad \quad \quad x = 1 \quad \quad \quad x = -34 \quad \quad \quad x = -1 \quad \quad \quad x = -86 \\
 \\
 -x + 25 = 40 \quad ; \quad -x + 7 = -13 \quad ; \quad -6 + x = 3 \quad ; \quad -46 + x = -17 \quad ; \quad -x + 21 = -7 \\
 -x = 40 - 25 \quad \quad -x = -13 - 7 \quad \quad x = 3 + 6 \quad \quad x = -17 + 46 \quad \quad -x = -7 - 21 \\
 -x = 15 \quad \quad \quad -x = -20 \quad \quad \quad x = 9 \quad \quad \quad x = 29 \quad \quad \quad -x = -28 \\
 x = -15 \quad \quad \quad x = 20 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x = 28
 \end{array}$$

Exercice n°2 : La racine carrée d'un nombre positif

a.

carré	3	4	5	10	0,6	0,7	1,1	90	1	0
	9	16	25	100	0,36	0,49	1,21	8 100	1	0

$$\sqrt{25} = 5 \quad ; \quad 4 = \sqrt{16} \quad ; \quad 10 = \sqrt{100} \quad ; \quad \sqrt{0,49} = 0,7$$

b.

carré	37	15	32	38	1,4	0,5	0,01	0,04	1111	6,4
	1369	225	1 024	1 444	1,96	0,25	0,0001	0,0016	1234321	40,96

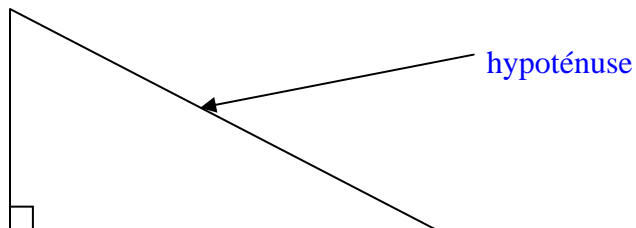
Racine carrée

c. Valeurs approchées à 0,001 près :

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{2} \approx 1,414 \quad ; \quad \sqrt{3} \approx 1,732 \quad ; \quad \sqrt{5} \approx 2,236 \quad ; \quad \sqrt{7} \approx 2,646 \quad ; \quad \sqrt{10} \approx 3,162 \\
 \sqrt{12} \approx 3,464 \quad ; \quad \sqrt{0,1} \approx 0,316 \quad ; \quad \sqrt{2,5} \approx 1,581
 \end{array}$$

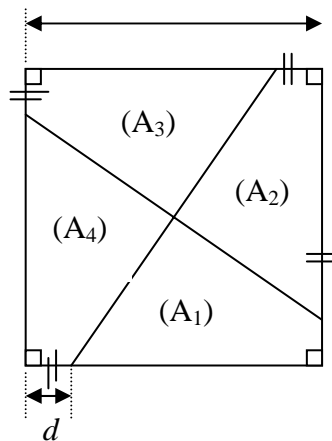
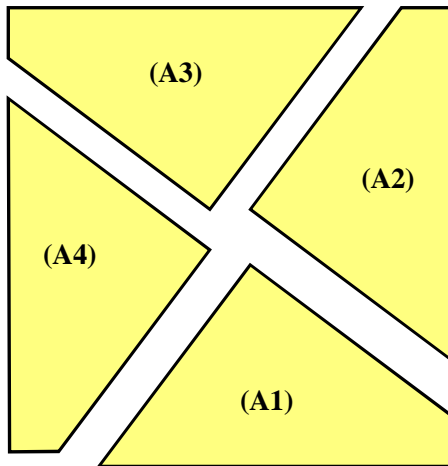
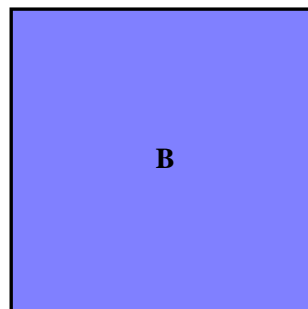
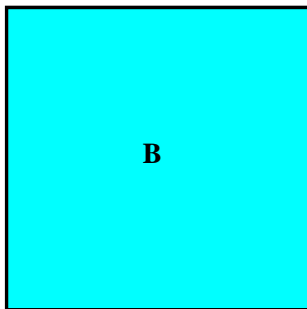
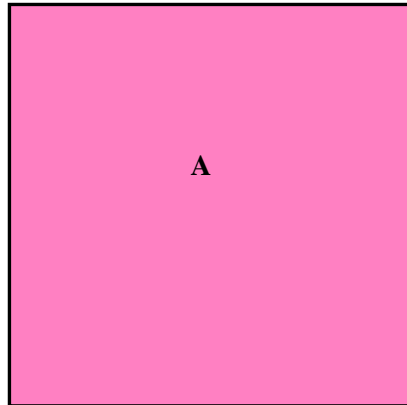
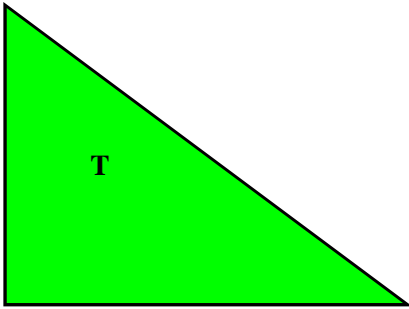
ACTIVITE : LE THEOREME DE PYTHAGORE

Information : Dans une triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé hypoténuse.



a et b sont deux nombres entiers tels que $a = 8$ cm et $b = 6$ cm.

On considère 8 morceaux : (A) ; (B) ; (B) ; (T) ; (A₁) ; (A₂) ; (A₃) ; (A₄) :



♦ Un triangle rectangle (T) dont les côtés perpendiculaires mesurent a cm et b cm.

(on appellera c la mesure en cm de l'hypoténuse).

♦ Deux carrés (B) de côté b cm.

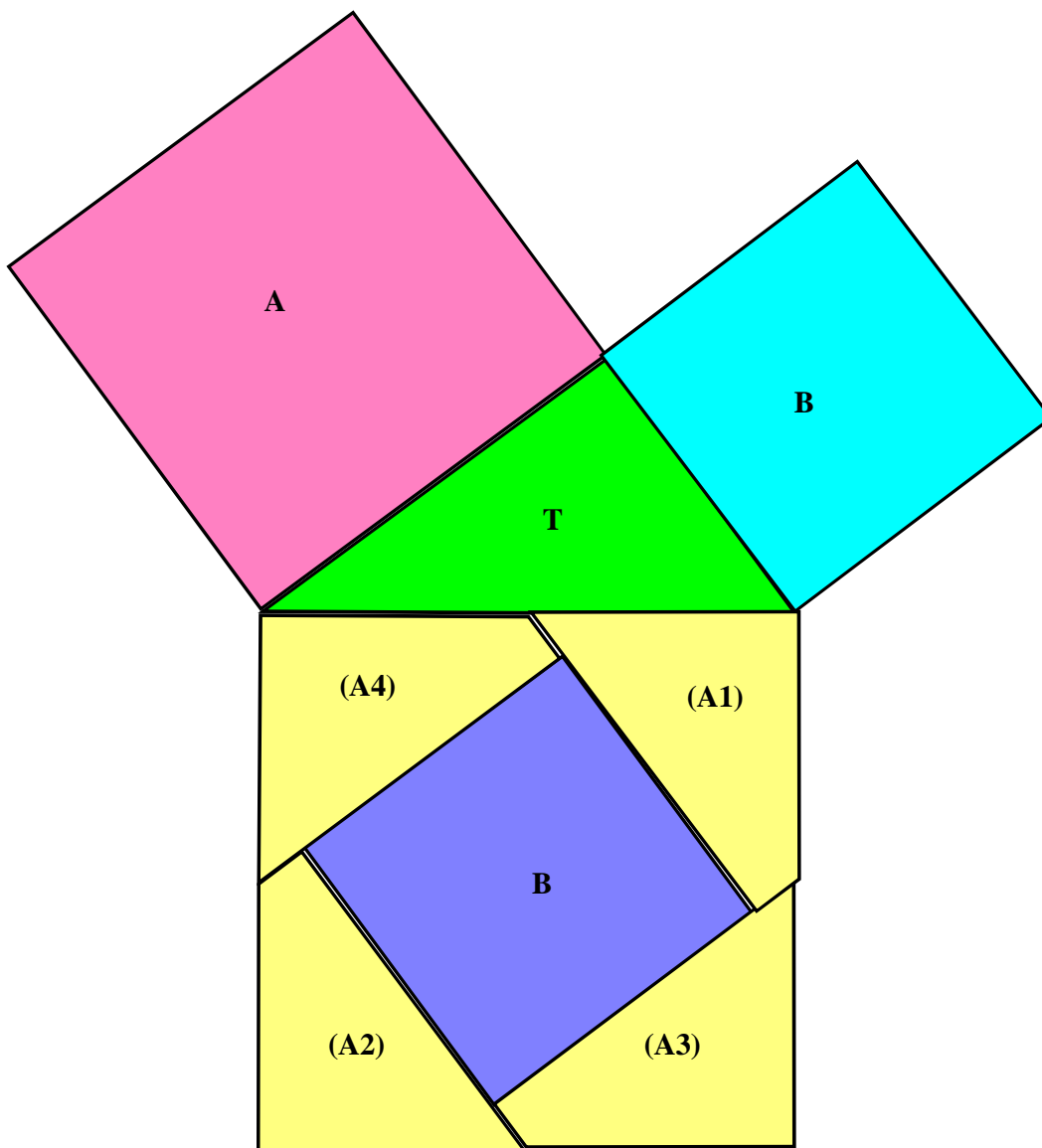
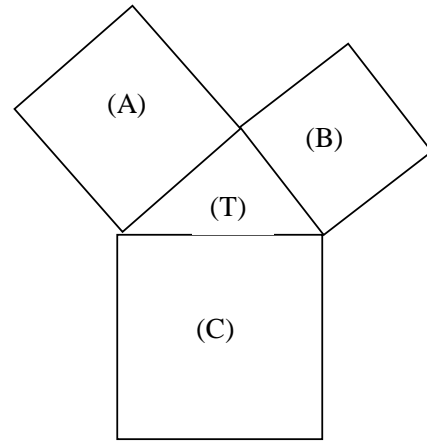
♦ Un carré (A) de côté a cm.

♦ Sur un 2^{ème} carré (A) de côté a cm, on a tracé deux segments qui le partagent en quatre morceaux (A₁), (A₂), (A₃), (A₄)

avec $d = \frac{a-b}{2}$ comme l'indique la figure.

Première partie : Assemblage

1. Découpe les 8 figures.
2. Assemble les quatre morceaux (A₁) (A₂) (A₃) (A₄) avec l'un des deux carrés (B) pour obtenir un carré (C) de côté c cm.
3. Réalise ensuite la figure ci-contre avec tes morceaux . Coller ensuite sur une feuille



Deuxième partie: Observations

1. Calcule :

$$\text{Aire du carré (A)} = 8^2 = 64 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Aire du carré (B)} = 6^2 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Aire du carré (C)} = \text{Aire du carré (A)} + \text{Aire du carré (B)} = 64 + 36 = 100 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Trouve une relation entre les aires des figures (A) , (B) et (C)

$$100 = 64 + 36$$

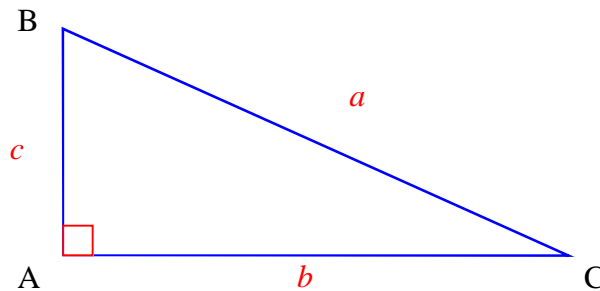
2. Généralisation : Donne une relation entre a^2 , b^2 et c^2 .

$$c^2 = a^2 + b^2$$

La relation que tu viens de trouver est appelée « **théorème de Pythagore** »

Troisième partie

1°)



4°)

- La longueur du côté le plus grand n'est pas égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.
- Le carré de la longueur du côté le plus grand est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

5°) **Dans un triangle , le carré de la longueur du côté le plus grand est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.**

Tu as observé, sur cette activité que dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse semble être égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit ou, en écriture mathématiques, que $a^2 = b^2 + c^2$. Mais en mathématiques, il ne suffit pas d'observer une propriété sur quelques exemples pour qu'elle soit toujours vraie : Il est nécessaire de la prouver. Pour cela, on doit faire une démonstration.

Quatrième partie : Démonstration du théorème de Pythagore

2. *Démontre que l'angle \widehat{CBE} est droit.*

Les points A, B et D sont alignés sur une même droite, donc $\widehat{ABD} = 180^\circ$.

$$\widehat{ABD} = (\widehat{ABC} + \widehat{DBE}) + \widehat{CBE}.$$

Dans le triangle rectangle ABC, on a $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Or $\widehat{ACB} = \widehat{DBE}$ (les triangles sont semblables) donc $(\widehat{ABC} + \widehat{DBE}) = 90^\circ$.

Résumons :

$$\begin{cases} \widehat{ABD} = 180^\circ \\ \widehat{ABD} = (\widehat{ABC} + \widehat{DBE}) + \widehat{CBE} \\ (\widehat{ABC} + \widehat{DBE}) = 90^\circ \end{cases}$$

Ces 3 relations, considérées ensemble, permettent d'écrire que $180^\circ = 90^\circ + \widehat{CBE}$ et donc que $\widehat{CBE} = 90^\circ$

L'angle \widehat{CBE} est droit.

3. *Démontre que le triangle CBE est rectangle isocèle.*

Le triangle CBE a un angle droit : \widehat{CBE} . Le triangle CBE a 2 côtés de même longueur : $BC = BE = a$

Conséquence : Le triangle CBE est rectangle isocèle.

4. *Démontre que le quadrilatère ADEC est un trapèze.*

Le quadrilatère ADEC a deux côtés parallèles : $(AC) \parallel (DE)$. En effet $(CA) \perp (AD)$ et $(DE) \perp (AD)$ donc

$(AC) \parallel (DE)$.

Conséquence : Le quadrilatère ADEC est un trapèze (et même un trapèze rectangle).

5. *Calcule l'aire du trapèze vu ci-dessus de deux manières différentes :*

a. En utilisant la formule de l'aire d'un trapèze, démontre que : $\text{Aire du trapèze} = \frac{b^2 + c^2}{2} + cb$

$$\text{Aire d'un trapèze} = \frac{[\text{grande base} + \text{petite base}] \times \text{hauteur}}{2}$$

La grande base du trapèze a pour longueur c . La petite base du trapèze a pour longueur b . La hauteur du trapèze a pour longueur $(b + c)$.

$$A = \frac{[c + b] \times (b + c)}{2} = \frac{c \times b + c^2 + b^2 + b \times c}{2} = \frac{cb + c^2 + b^2 + cb}{2} = \frac{b^2 + c^2 + 2cb}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{2cb}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2} + cb$$

b. En utilisant la somme des aires des trois triangles rectangles qui le constituent, démontre que :

$$\text{Aire du trapèze} = \frac{a^2}{2} + cb$$

$$A = \frac{c \times b}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b \times c}{2} = \frac{cb + a^2 + cb}{2} = \frac{a^2 + 2cb}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{2cb}{2} = \frac{a^2}{2} + cb$$

1) En utilisant les deux résultats obtenus dans la question 5), montre que $a^2 = b^2 + c^2$

Les résultats obtenus par les 2 méthodes sont identiques, donc :

$$\frac{a^2}{2} + cb = \frac{c^2 + b^2}{2} + cb \quad \text{égalité équivalente à} \quad \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2} \quad \text{et donc l'égalité est équivalente à : } a^2 = b^2 + c^2$$

Cinquième partie : COMMENT REDIGER

Énoncé du problème 1 : On considère un triangle rectangle en A tel que $AB = 7$ cm et $AC = 9$ cm.
Calculer la longueur du côté [AC].

Complète :

Dans le triangle ABC rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 7^2 + 9^2$$

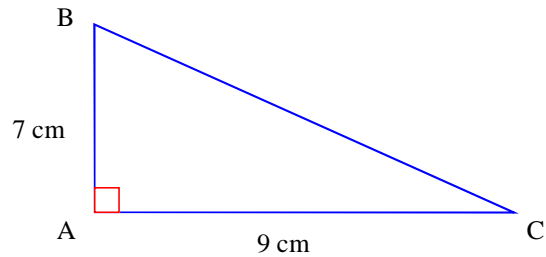
$$BC^2 = 49 + 81$$

$$BC^2 = 130$$

$$BC = \sqrt{130}$$

$$BC \approx 11,4$$

Conclusion : **La longueur de BC est environ 11,4 cm.**



Problème 2 : On considère un triangle ABC, rectangle en A et d'hypoténuse [BC] tel que :
 $AB = 12$ cm et $BC = 13$ cm.
Calcule la longueur du côté [AC] (Faire la même rédaction que ci-dessus)

Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$13^2 = 12^2 + AC^2$$

$$169 = 144 + AC^2$$

$$AC^2 = 169 - 144$$

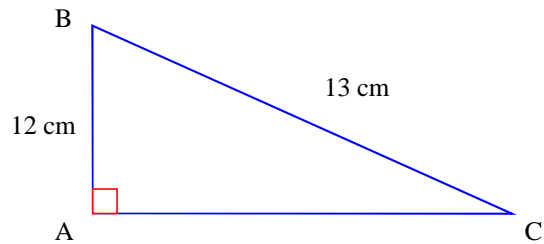
$$AC^2 = 25$$

$$AC = \sqrt{25}$$

$$AC = 5$$

Conclusion:

AC = 5 cm



Exercice n°1 :

Le triangle ABC est rectangle en C. On a donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AB^2 = 16 + 9$$

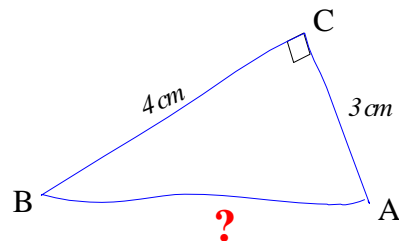
$$AB^2 = 25$$

$$AB = \sqrt{25}$$

$$AB = 5$$

Conclusion :

AB = 5 cm



Exercice n°2 :

Le triangle ABC est rectangle en C. On a donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$MN^2 = MP^2 + NP^2$$

$$MN^2 = 4^2 + 8^2$$

$$MN^2 = 16 + 64$$

$$MN^2 = 80$$

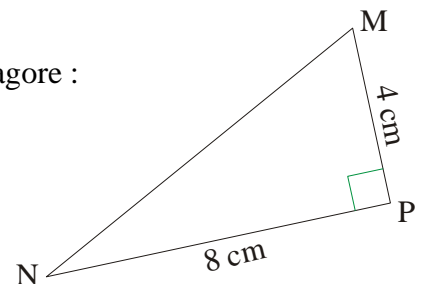
$$MN = \sqrt{80}$$

$$MN \approx 8,94$$

Conclusion :

La valeur exacte de MN est $\sqrt{80}$ cm

La valeur arrondie au mm près est 8,9 cm



Exercice n°3 :

Le triangle ABD est rectangle en B. On a donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$EG^2 = EF^2 + FG^2$$

$$6^2 = 4^2 + FG^2$$

$$36 = 16 + FG^2$$

$$FG^2 = 36 - 16$$

$$FG^2 = 20$$

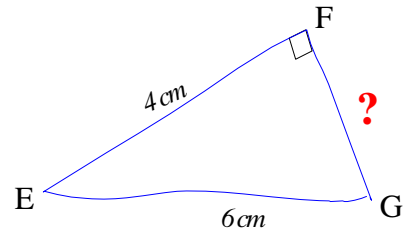
$$FG = \sqrt{20}$$

$$FG \approx 4,47$$

Conclusion :

La valeur exacte de FG est $\sqrt{20}$ cm

La valeur arrondie au mm près est 4,5 cm



Exercice n°4 :

Le triangle PBH est rectangle en B. On a donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$HP^2 = PB^2 + HB^2$$

$$5^2 = 1^2 + HB^2$$

$$25 = 1 + HB^2$$

$$HB^2 = 25 - 1$$

$$HB^2 = 24$$

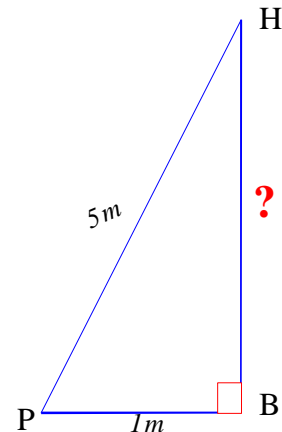
$$HB = \sqrt{24}$$

$$HB \approx 4,898$$

Conclusion :

La valeur exacte de HB est $\sqrt{24}$ m

La valeur arrondie au cm près est 4,90 m



Exercice n°5 :

1°) a) Carré ABCD de côté 5 cm

Le triangle ABC est rectangle en B car un carré à 4 angles droits.

On a donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 5^2 + 5^2$$

$$AC^2 = 25 + 25$$

$$AC^2 = 50$$

$$AC = \sqrt{50}$$

$$AC \approx 7,07$$

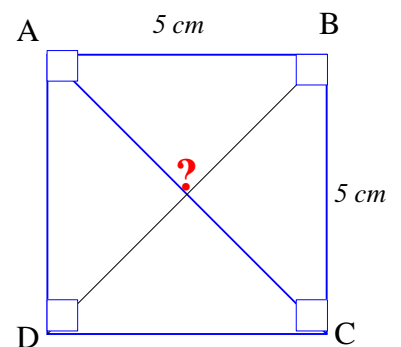
Comme dans

longueur,

Conclusion :

La longueur exacte de la diagonale est $\sqrt{50}$ cm

Sa valeur arrondie au mm près est 7,1 cm



un carré les diagonales ont la même
alors $DB = AC$

1°) b) Rectangle EFGH de 7 cm sur 3 cm.

Le triangle EFG est rectangle en F car un rectangle à 4 angles droits.

On a donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$EG^2 = EF^2 + FG^2$$

$$EG^2 = 7^2 + 3^2$$

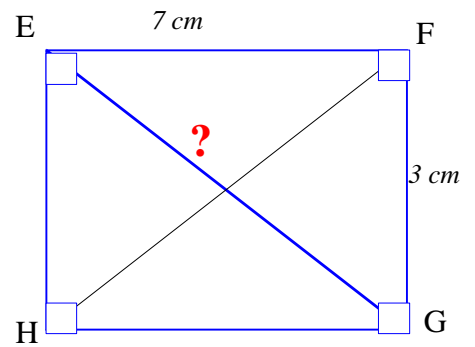
$$EG^2 = 49 + 9$$

$$EG^2 = 58$$

$$EG = \sqrt{58}$$

$$EG \approx 7,61$$

Comme dans un rectangle les diagonales ont la même longueur, alors $EG = HF$



Conclusion :

La longueur exacte de la diagonale est $\sqrt{58}$ cm

Sa valeur arrondie au mm près est 7,6 cm

2°) Rectangle IJKL tel que $IJ = 4$ cm et $JL = 5$ cm.

Le triangle IJK est rectangle en J car un rectangle à 4 angles droits.

On a donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$IK^2 = IJ^2 + JK^2$$

$$5^2 = 4^2 + JK^2$$

($IK = JL = 5$ cm car les diagonales ont la même longueur)

$$25 = 16 + JK^2$$

$$JK^2 = 25 - 16$$

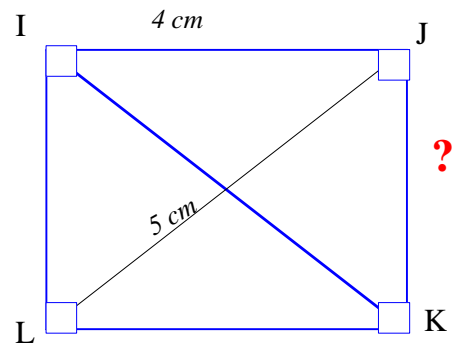
$$JK^2 = 9$$

$$JK = \sqrt{9}$$

$$JK = 3$$

Conclusion :

La longueur du côté [JK] mesure 3 cm



Exercice n°6 :

a) Calcul de la longueur AC.

Un cube est formé de faces carrés, donc ABC est un triangle rectangle en B.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 10^2 + 10^2$$

$$AC^2 = 100 + 100$$

$$AC^2 = 200$$

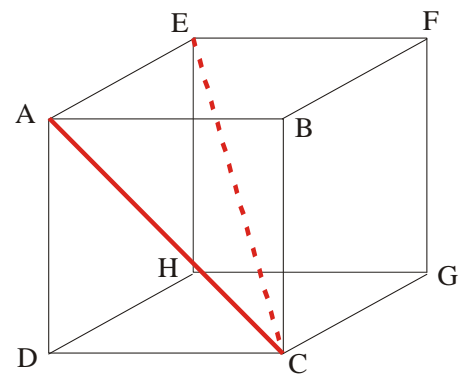
$$AC = \sqrt{200}$$

$$AC \approx 14,14$$

Conclusion :

La longueur exacte de la diagonale est $\sqrt{200}$ cm

Sa valeur arrondie au mm près est 14,1 cm



b) Calcul de la longueur EC.

Dans le triangle AEC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$EC^2 = AE^2 + AC^2$$

$$EC^2 = 10^2 + 200 \quad (\text{d'après la question a)})$$

$$EC^2 = 100 + 200$$

$$EC^2 = 300$$

$$EC = \sqrt{300}$$

$$EC \approx 17,32$$

Conclusion :

La longueur exacte de EC est $\sqrt{300}$ cm

Sa valeur arrondie au mm près est 17,3 cm