THEME 2 : DEMONSTRATION - TRIANGLE DROITE DES MILIEUX

Pour prendre un bon départ

Initiation à la démonstration

1°) *Lire la partie A de la synthèse : « Notion de démonstration »*

2°) Complète les raisonnements suivants :

a. On sait que EFG est un triangle isocèle en E.

Si **un triangle est isocèle** alors il a deux côtés de même longueur.

Donc **EF = EG**

b. On sait que ABCD est **un losange**.

Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.

Donc **(AC) perpendiculaire à (DB)**

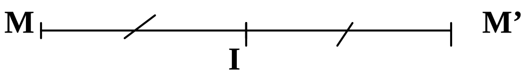
c. On sait que EFGH est un rectangle.

Si un **quadrilatère** est un **rectangle** alors ses côtés opposés sont **de la même longueur**.

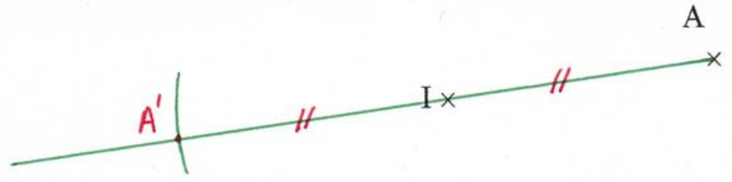
Donc EF = **GH**

La symétrie centrale (***A savoir***)

Définition : Si le point I est le milieu du segment [MM'] alors on dit que le point M' est Le **symétrique du point M** par rapport au point I.

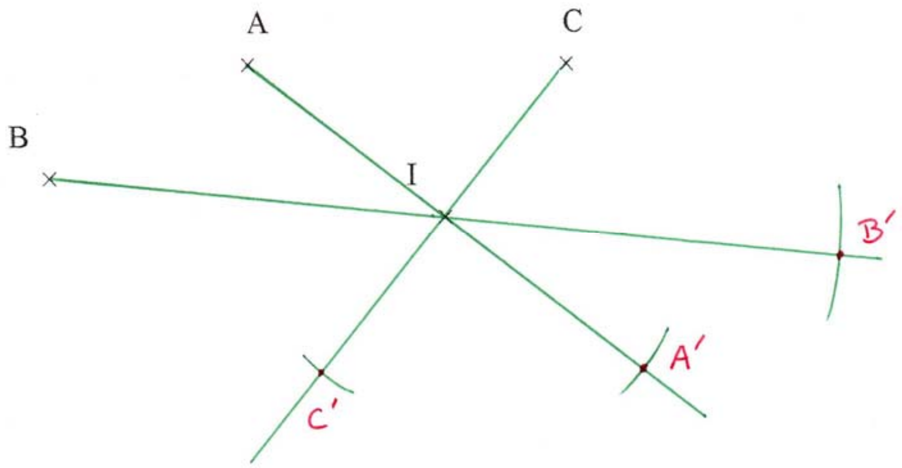


Programme de construction :
On veut construire le symétrique du point A par rapport au point I.

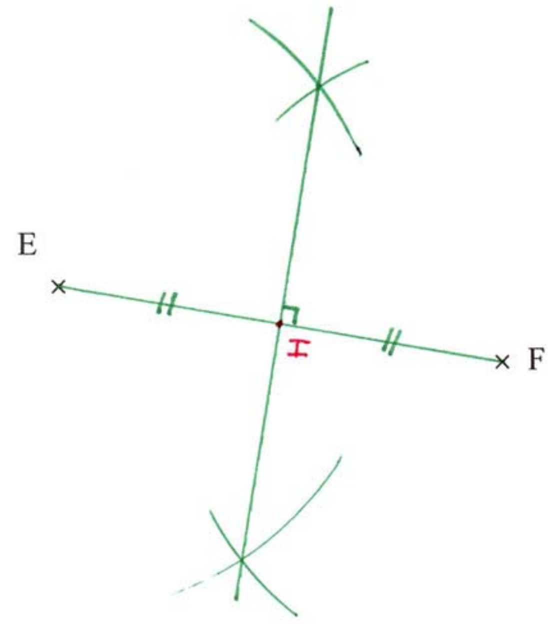


- On trace la **demi droite** [AI)
- On place A' sur **[AI)** tel que **AI** = **A'I** (on utilise le **compas**)

3°) Construis à la règle et au compas les symétriques respectifs des points A, B, C, par rapport au point I.
Nomme-les A', B' et C'.

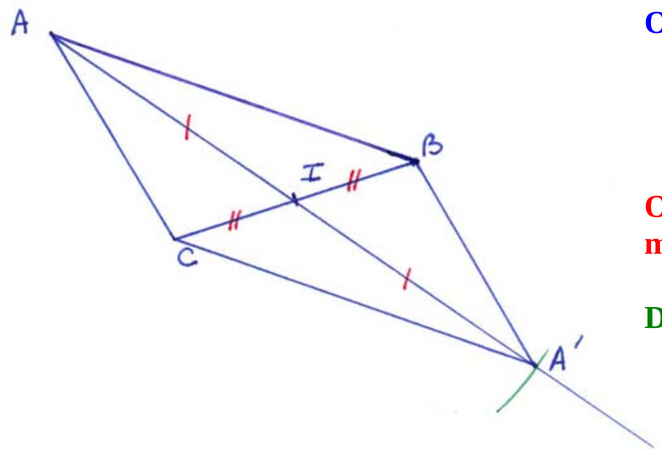


4°) On considère les points E et F ci-dessous. Place le point I tel que E et F soient symétriques par rapport à I.



Parallélogramme – démonstration

5°) Trace un triangle quelconque ABC. Soit I le milieu de [BC]. Soit A' le symétrique de A par rapport à I. Démontre que le quadrilatère ABA'B' est un parallélogramme.



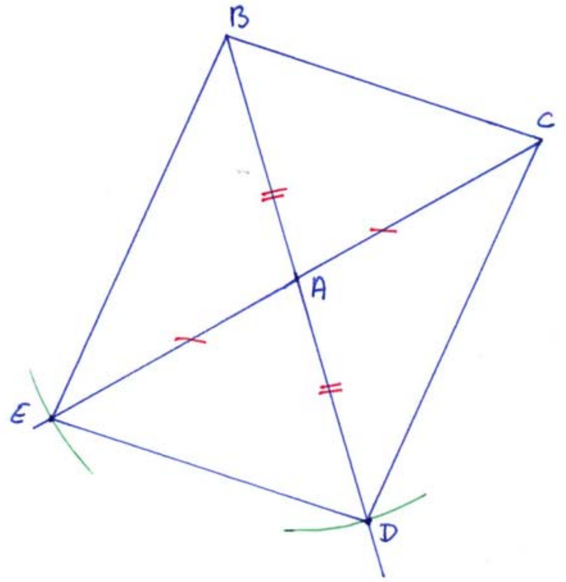
On sait que :

- **I milieu de [BC] ;**
- **I milieu de [AA'] car A' est le symétrique du point A par rapport à I.**
-

Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc : ABA'B' est un parallélogramme

6°) Trace un triangle quelconque ABC. Soit D et E les symétriques respectifs de B et C par rapport à A. Démontre que le quadrilatère BCDE est un parallélogramme.



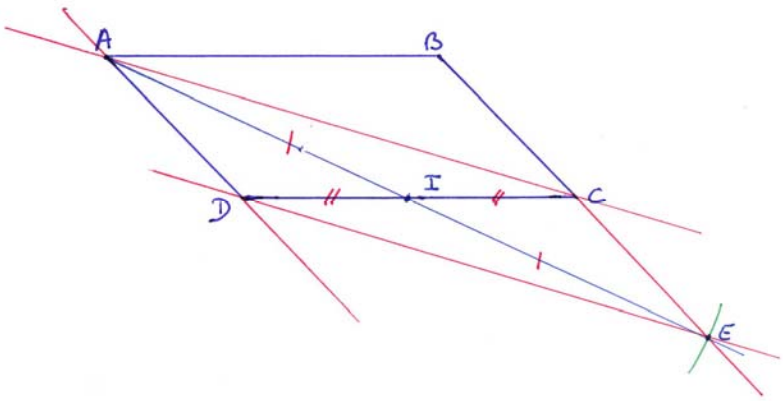
On sait que :

- **A milieu de [BD] car D est le symétrique du point B par rapport à A ;**
- **A milieu de [EC] car E est le symétrique du point C par rapport à A.**

Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc : BCDE est un parallélogramme

7°) Trace un parallélogramme ABCD. Soit I le milieu de [DC]. Soit E le symétrique de A par rapport à I.
Démontre que (AC) // (DE) et que (AD) // (CE).



On sait que :
- **I milieu de [DC] ;**
- **I milieu de [EA] car E est le symétrique du point A par rapport à I.**

Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

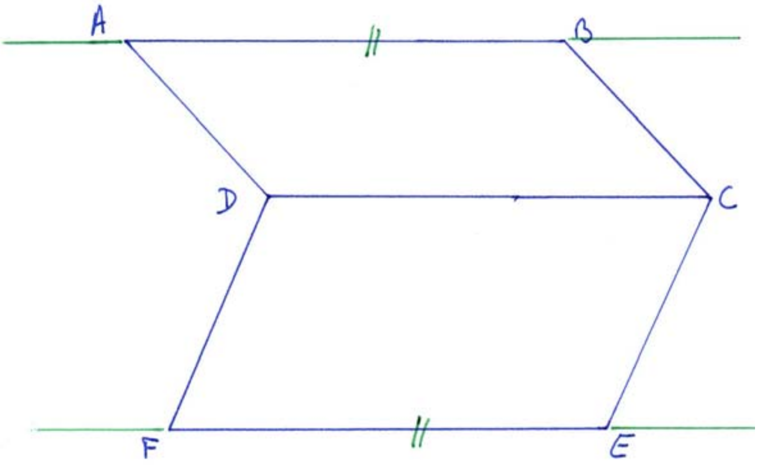
Donc : ACED est un parallélogramme

On sait que : ACED est un parallélogramme

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Donc : (AC) // (DE) et (AD) // (CE).

8°) Construire deux parallélogramme ABCD et DCEF. Démontre que AB = EF et que (AB) // (EF).



On sait que : ABCD est un parallélogramme.

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme alors il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

Donc : AB = DC et (AB) // (DC)

De même,
On sait que : DCEF est un parallélogramme.

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme alors il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

Donc : DC = EF et (DC) // (EF)

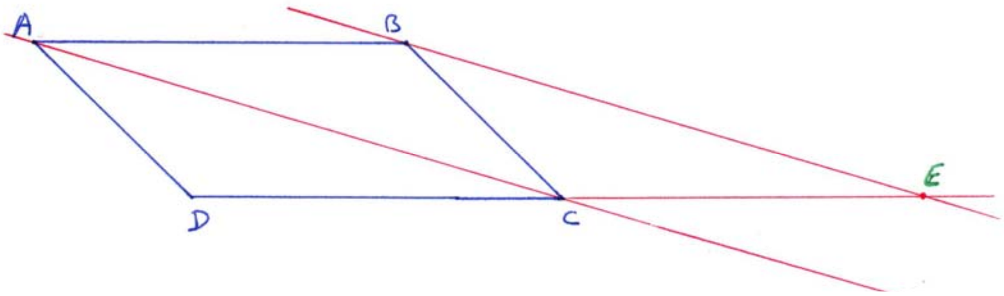
On sait que : AB = DC et DC = EF
Donc : AB = EF

On sait que : (AB) // (DC) et (DC) // (EF)

Or, si deux droites sont parallèles à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.

Donc : (AB) parallèle à (EF)

9°) Trace un parallélogramme ABCD. La parallèle à (AC) passant par B coupe (DC) en E. Démontre que ABEC est un parallélogramme.



On sait que : ABCD est un parallélogramme.

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

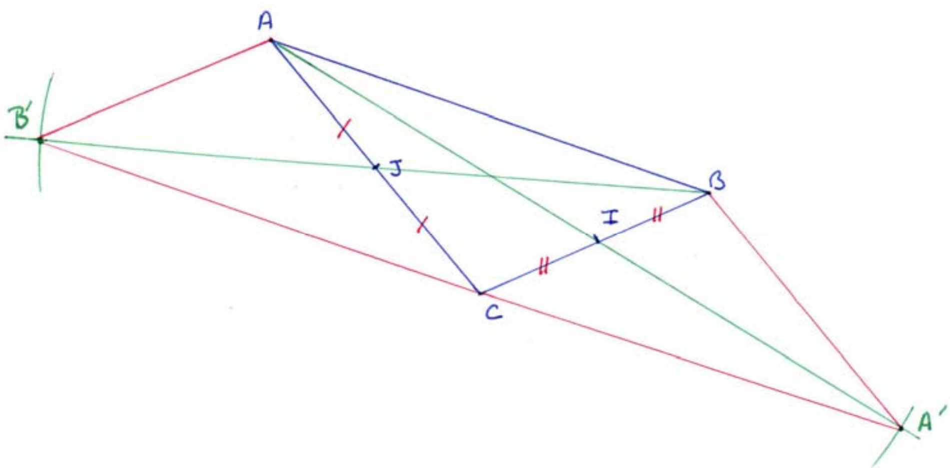
Donc : (AB) // (CE)

On sait que : (AC) // (BE) et (AB) // (CE)

Or, si un quadrilatère à ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.

Donc : ABEC est un parallélogramme.

10°) Trace un triangle quelconque ABC. Soit I le milieu de [BC] et soit J le milieu de [AC]. Soit A' le symétrique de A par rapport à I. Soit B' le symétrique de B par rapport à J. Démontre que les quadrilatère ACA'B et AB'CB sont des parallélogrammes.



On sait que :

- **I milieu de [BC] ;**
- **I milieu de [AA'] car A' est le symétrique du point A par rapport à I.**

Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc : ACA'B est un parallélogramme

On sait que :

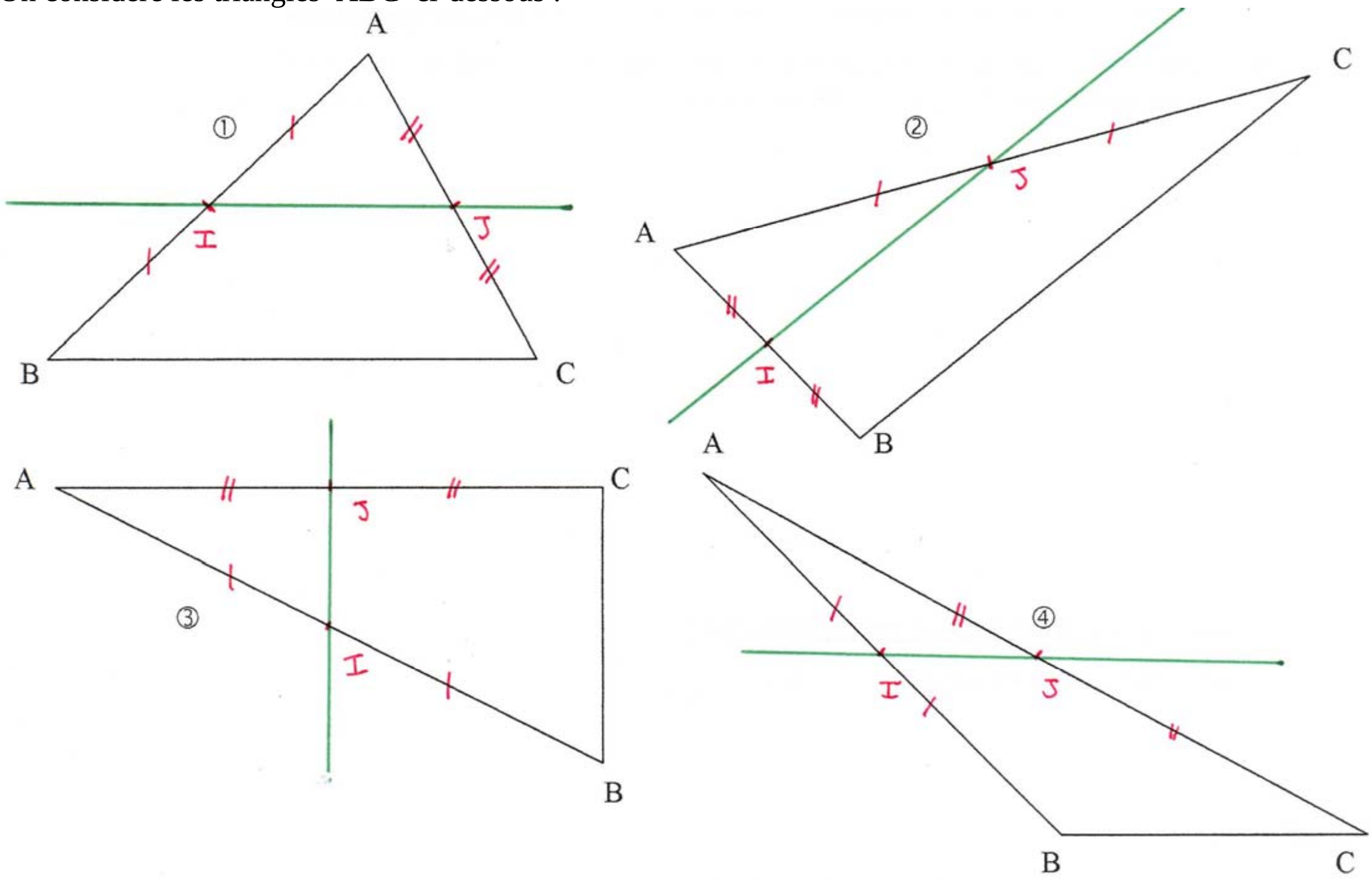
- **J milieu de [AC] ;**
- **J milieu de [BB'] car B' est le symétrique du point B par rapport à J.**

Or, si un quadrilatère à ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc : AB'CB est un parallélogramme

ACTIVITE 1 : **A - <u>Propriété de la droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle</u>**

On considère les triangles ABC ci-dessous :



1. Pour chacun d'eux : - Place le point I milieu de [AB] et le point J est milieu de [AC].
   - Trace la droite (IJ).

2. a) Examine la position de la droite (IJ) par rapport à la droite (BC).
   b) Coche la case phrase qui te paraît être vraie :
   - ☐ Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, elle ne semble pas être parallèle au troisième côté.
   - ☒ Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, elle semble être parallèle au troisième côté.

B - <u>Mesure de la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle.</u>

1. On considère de nouveau les 4 triangles ci-dessus où I est le milieu de [AB] et où J est le milieu de [AC]. Examine pour chacun d'eux la longueur du segment [IJ] par rapport à la longueur du segment [BC].
   Complète le tableau ci-dessous .

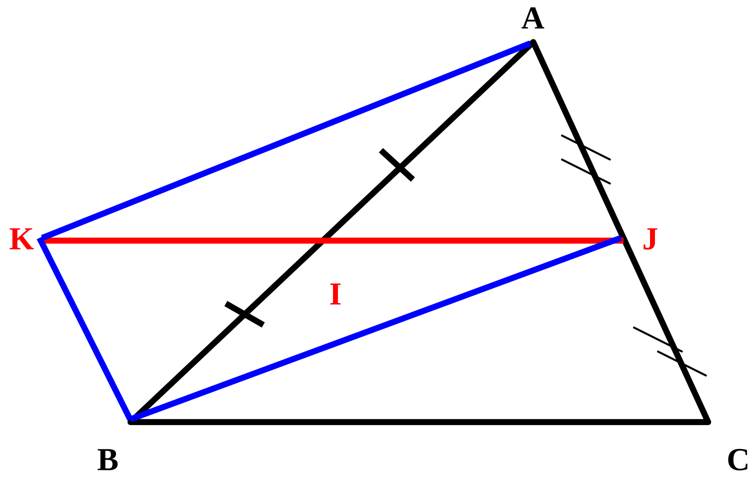
	Triangle ①	**Triangle ②**	**Triangle ③**	**Triangle ④**
Mesure de la longueur du segment [IJ] (au mm près)	**3,4 cm**	**4 cm**	**1,9 cm**	**2,1 cm**
Mesure de la longueur du segment [BC] (au mm près)	**6,8 cm**	**8 cm**	**3,8 cm**	**4,2 cm**

2. Coche la phrase qui te paraît être vraie.
   - ☒ Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés semble être égale à la moitié de celle du troisième côté.
   - ☐ Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés ne semble pas être égale à la moitié de celle du troisième côté.

C - Démonstration des observations.

*Rappel : En mathématiques, il ne suffit pas d'observer une propriété sur quelques exemples pour qu'elle soit toujours vraie : il est nécessaire de la prouver. Pour cela on doit faire **une démonstration.***

♦ Soit **ABC** est un triangle, **I** est le **milieu** du côté **[AB]**, **J** est le **milieu** du côté **[AC]** et K le point symétrique de J par rapport au point I. Construis les points I, J et K.



Démontrons que AKBJ est un parallélogramme

♦ **On sait que : I milieu de [AB] et de [KJ] (car K est le symétrique de J par rapport à I)**
Si un quadrilatère à ses diagonales qui ont même milieu alors c'est un parallélogramme

Donc AKBJ est un parallélogramme

Démontrons que (KB) parallèle à (AJ) et KB = AJ

♦ **On sait maintenant que : AKBJ est un parallélogramme**
Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux et sont de même longueur.

Donc (KB) parallèle à (AJ) et KB = AJ

Démontrons que JKBC est un parallélogramme

♦ **On sait que : J est le milieu de [AC], (KB) parallèle à (JC) et KB = AJ = JC**

Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur alors C'est un parallélogramme.

Donc JKBC est un parallélogramme

Démontrons que (KJ) parallèle à (BC) et KJ = BC

♦ **On sait maintenant que : JKBC est un parallélogramme**
Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux et sont de même longueur.

Donc (KJ) parallèle à (BC) et KJ = BC

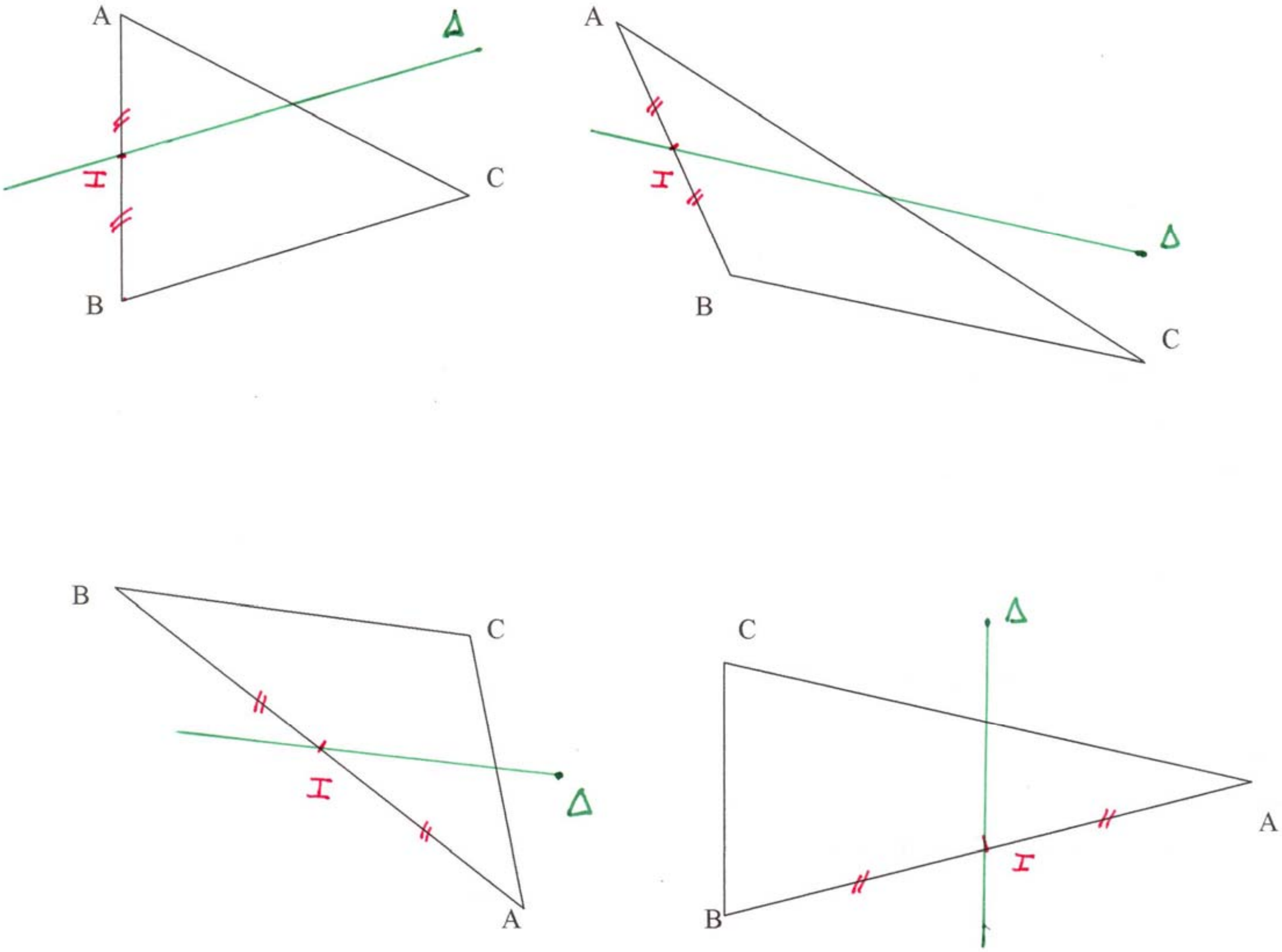
♦ **Conclusion : I étant le milieu de [KJ], on a alors (IJ) parallèle (BC) et IJ = ½ BC**

♦ **BILAN**

Dans un triangle, la droite qui passe par les **milieux** de deux côtés est alors **parallèle au troisième côté du triangle.**
Dans un triangle, la longueur du segment qui joint les **milieux** de deux côtés est égale à **la moitié de la longueur du troisième côté du triangle.**

<u>ACTIVITE 2 :</u> Propriété de la droite qui passe par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle à un second côté.

1°) On considère les triangles ABC ci-dessous.



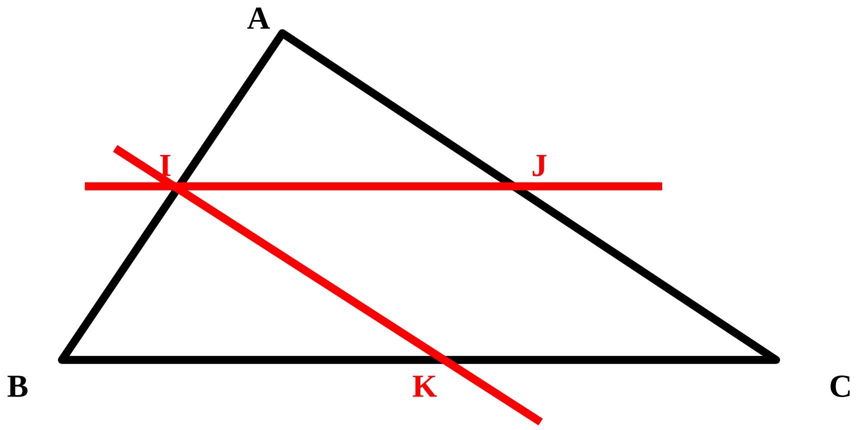
2°) Pour chacun des triangles ci-dessus :

- Place le point I milieu de [AB] et trace la droite (Δ) qui passe par I et est parallèle au côté (BC).
- Examine si la droite (Δ) passe par le milieu du segment [AC].

- Coche la phrase qui te paraît être vraie :
  - ☐ Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle ne semble pas couper le troisième côté en son milieu.
  - ☒ Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second, alors elle semble couper le troisième côté en son milieu.

3°) Démonstration :

- Soit **ABC** est un triangle, **I** est le **milieu** du côté **[AB]**, K est le **milieu** de [BC]. La droite passant par **I** et **parallèle** au côté **[BC] coupe** le côté **[AC]** en un point **J**. Construire les points I, J et K.



- **On sait que ABC est un triangle, I est le milieu de [AB] et K est le milieu de [BC]**

d'après la propriété sur les milieux :
Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté du triangle.

Donc la droite (IK) est parallèle à (AC)

- **On sait maintenant que la droite (IK) est parallèle à la droite (AC)**

Si un quadrilatère à ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme

Donc IKCJ est un parallélogramme

- **On sait maintenant que IKCJ est un parallélogramme**

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont de même longueur

Donc JC = IK

- **On sait que ABC est un triangle, I est le milieu de [AB] , K est le milieu de [BC] et (IK) parallèle à (AC)**

d'après la propriété de la droite des milieux :
Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

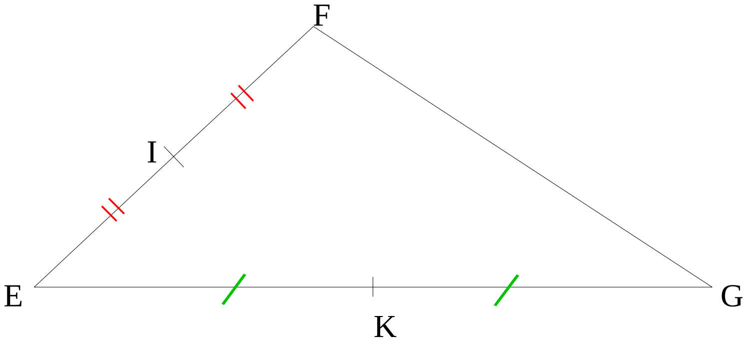
Donc IK = ½ AC on a donc : JC = ½ AC

- **<u>Conclusion</u> : J est le milieu du segment [AC]**

- **Enoncé de la propriété sur les milieux dans un triangle :**

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté, coupe le troisième côté en son milieu .

Exercice n°1 :



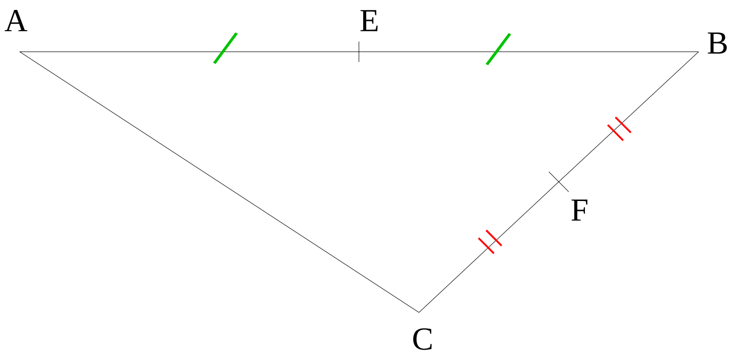
Démontre que les droites (IK) et (FG) sont parallèles

On sait que : - EFG est un triangle.
- I milieu de [EF]
- K milieu de [EG]

Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté du triangle.

Donc (IK) est parallèle à (FG).

Exercice n°2 :



AB = 6 cm
AC = 5 cm
CB = 3 cm

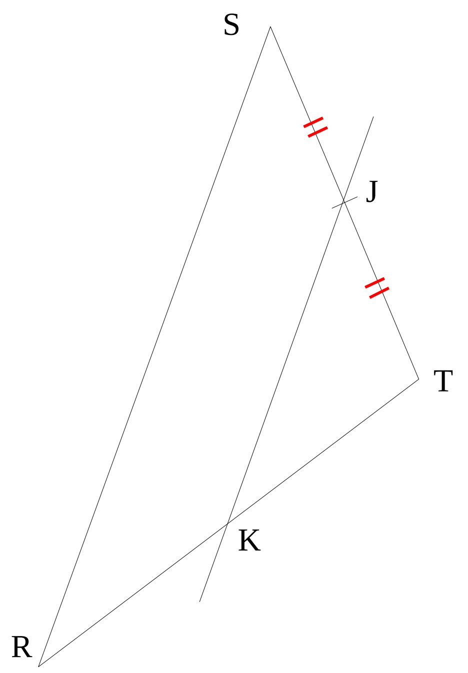
Calcule la longueur du segment [EF]
Justifie ta réponse.

On sait que : - ABC est un triangle.
- E milieu de [AB]
- F milieu de [BC]

Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté du triangle

Donc EF = ½ × AC = ½ × 5 = 2,5
Conclusion : **EF = 2,5 cm**

Exercice n°3 :



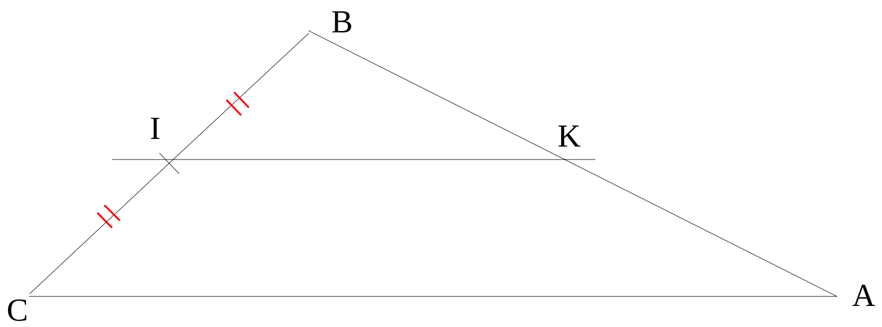
(SR) // (JK)
Démontre que le point K est le milieu du segment [RT]

On sait que : - **STR est un triangle**
- **J est le milieu de [ST]**
- **(SR) est parallèle à (JK)**

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu

Donc K est le milieu de [RT]

Exercice n°4 :



Les droites (IK) et (CA) sont parallèles.
CA = 8,5 cm.

1) Démontre que le point K est le milieu du segment [AB].
2) Calcule IK. Justifie la réponse.

1) Démontrons que K milieu de [AB]

On sait que : - **ABC est un triangle**
- **I est le milieu de [CB]**
- **(IK) est parallèle à (CA)**

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu

Donc K est le milieu de [AB]

2) Calcul de IK

On sait que : - **ABC est un triangle.**
- **I milieu de [CB]**
- **K milieu de [AB] (d'après la question 1))**

Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté du triangle

Donc IK = ½ × AC = ½ × 8,5 = 4,25
Conclusion : **IK = 4,25 cm**

Exercice n°5 : ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD) . Soit I le milieu de [AD] et K le milieu de [BD].

1°) Faire une figure

2°) Démontre que (IK) parallèle à (AB)

3°) En déduire que (IK) parallèle à (DC)

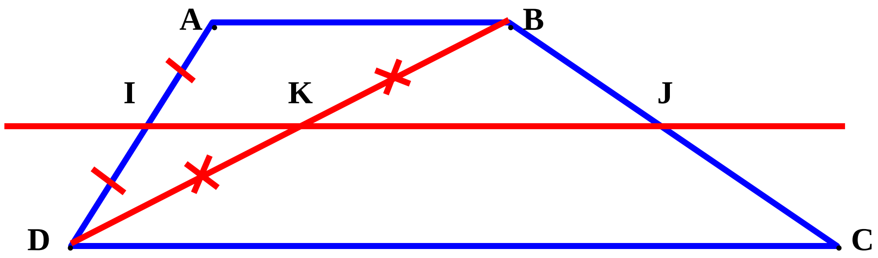
4°) Démontre que (IK) coupe [BC] en son milieu

5°) Calcule IK

6°) Calcule KJ

7°) Calcule IJ

1°)



2°) Démontrons que (IK) parallèle à (AB)

On sait que : - ABD est un triangle ; I milieu de [AD] ; K milieu de [BD].

Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté du triangle

Donc (IK) parallèle à (AB)

3°) Déduire que (IK) parallèle à (DC)

On sait que : - ABCD est un trapèze donc les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

- (IK) parallèle à (AB)

Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles

Donc (IK) parallèle à (DC)

4°) Démontrons que (IK) coupe [BC] en son milieu

On sait que : - BCD est un triangle ; K est milieu de [DB] et (IK) est parallèle à (DC)

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu

Donc (IK) coupe [BC] en son milieu

5°) Calcul de IK

On sait que : - ABD est un triangle.

- K est milieu de [DB]

- I est milieu de [AD]

Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté du triangle

Donc IK = ½ AB

6°) Calcul de KJ

On sait que : - DBC est un triangle.

- K est milieu de [DB]

- J est milieu de [BC]

Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté du triangle

Donc KJ = ½ DC

7°) Calcul de IJ :

IJ = IK + KJ = ½ AB + ½ DC = ½ (AB + DC)

Le segment [IJ] est appelé « base moyenne » du trapèze

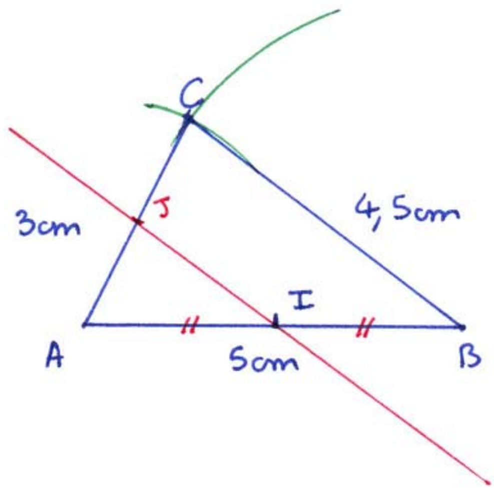
Exercice n°6 :

Dans un triangle ABC, les côtés [AB], [BC] et [AC] mesurent respectivement 5 cm, 4,5 cm et 3 cm.
Le point I est le milieu du côté [AB]. La parallèle à (BC) passant par I coupe [AC] en J.

1°) Faire une figure.
2°) Calcule AJ.

Corrigé

1°) Figure.



2°) Calcule de AJ.

On sait que : - **ABC est un triangle**
- **I milieu de [AB]**
- **(IJ) parallèle à (BC)**

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc J est milieu de [AC]

Ainsi : $AJ = \frac{1}{2} \times AC = \frac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$ **(cm)**

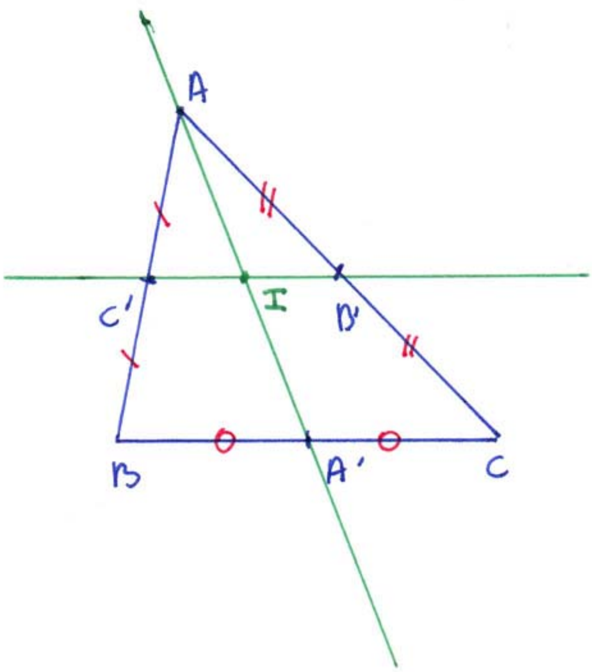
Exercice n°7 :

On considère un triangle ABC. Soit A' le milieu de [BC] , B' le milieu de [AC] , C' le milieu de [AB].
Soit I le point d'intersection de (AA') et (B'C').

1°) Faire une figure.
2°) Démontre que (B'C') est parallèle à (BC).
3°) Démontre que I est le milieu de [AA'].

Corrigé

1°) Figure.



2°) Démontrons que (B'C') est parallèle à (BC).

On sait que : - **ABC est un triangle.**
- **C' est le milieu de [AB]**
- **B' est le milieu de [CA].**

Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté du triangle

Donc (CB) est parallèle à (C'B')

3°) Démontrons que I est le milieu de [AA'].

On sait que : - **AA'C est un triangle.**
- **B' est le milieu de [AC].**
- **(IB') est parallèle à (A'C) car I est un point de [C'B'] , A' est un point de [BC] et d'après la question 2°) (C'B') parallèle à (BC).**

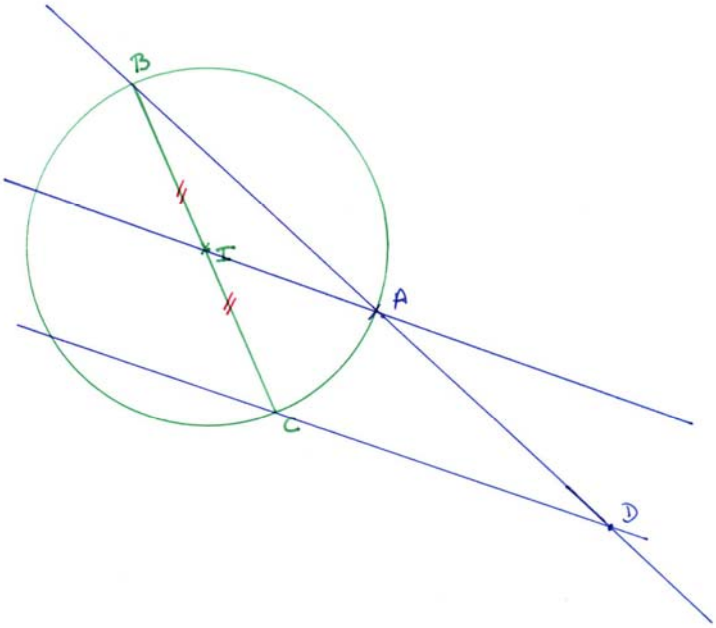
Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc I est milieu de [AA']

Exercice n°8 :
On considère un cercle de centre I.
- [BC] est un diamètre de ce cercle et A est un point de ce cercle.
- La parallèle à (IA) passant par C coupe (BA) en un point D.

1°) Faire une figure.
2°) Démontre que le point A est le milieu de [BD].

Corrigé
1°) Figure.



2°) Démontrons que le point A est le milieu de [BD].

On sait que : - BCD est un triangle
- I milieu de [BC] car [BC] est un diamètre du cercle de centre I.
- (IA) parallèle à (CD)

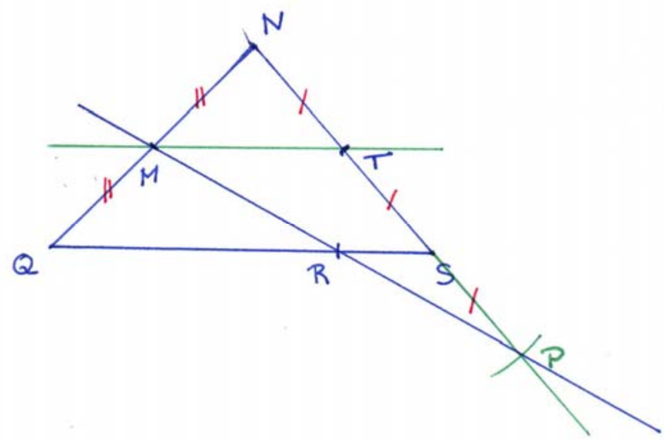
Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc A est milieu de [BD]

Exercice n°9 :
On considère le triangle QSN.
- Soit T le milieu de [SN] et M le milieu de [QN].
- Soit P le symétrique de T par rapport à S.
- La droite (PM) coupe (SQ) en R.

1°) Faire une figure.
2°) Démontre que (MT) est parallèle à (RS).
3°) Démontre que R est le milieu de [PM].

Corrigé
1°) Figure.



2°) Démontrons que (MT) est parallèle à (RS).
On sait que : - SQN est un triangle.
- M est le milieu de [QN].
- T est le milieu de [SN].

Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté du triangle

Donc (MT) est parallèle à (RS)

3°) Démontrons que R est le milieu de [PM].
On sait que : - PMT est un triangle
- S milieu de [TP] car P est le symétrique de T par rapport à S.
- (MT) parallèle à (RS)

Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Donc R est milieu de [RS]