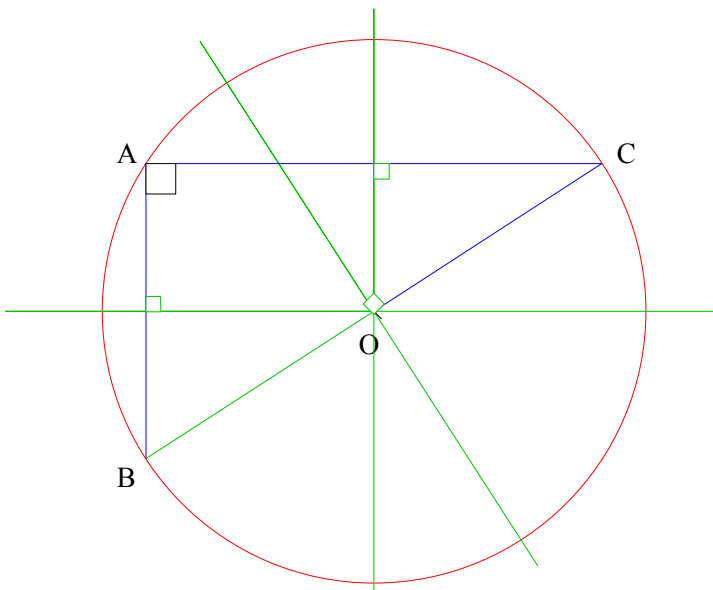


THEME 14 : TRIANGLE RECTANGLE (2) - CERCLE CIRCONSCRIT - MEDIANE - RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE (2)



ACTIVITE 1 :

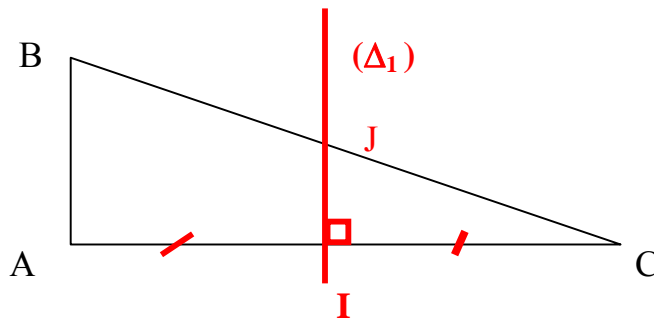
1°) Observations

2°) Conjecture

- Le point de concours des médiatrices d'un triangle rectangle semble être situé au milieu de son hypoténuse.
- Le milieu de l'hypoténuse semble être le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle.

Si un triangle est rectangle alors le milieu de l'hypoténuse est le centre de son cercle circonscrit

2°) Démonstration : On considère ci-dessous le triangle rectangle en A et d'hypoténuse [BC].



- (Δ_1) est la médiatrice du segment [AC], donc (Δ_1) et (AC) sont **perpendiculaires**

Le triangle ABC est rectangle en A, donc (AB) et (AC) sont **perpendiculaires**

Les droites (Δ_1) et (AB) sont donc **parallèles**

- On sait que I milieu de [AC] et la droite (Δ_1) coupe le côté [BC] en J et est parallèle à (AB).

D'après la propriété : **Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu**

Donc J est le milieu de [BC].

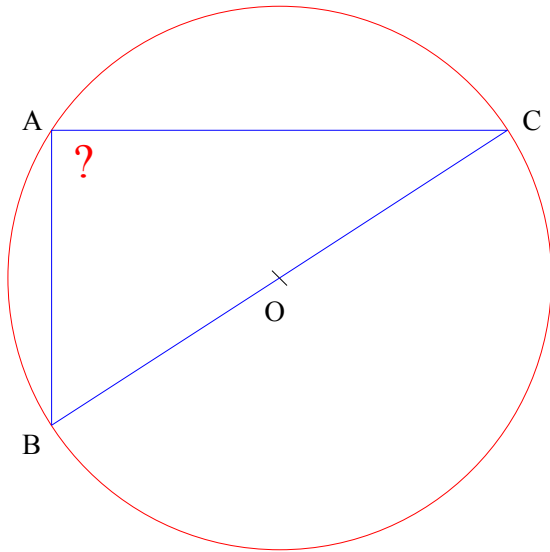
- Comme J appartient à la médiatrice de [AC] et est le milieu de [BC], alors J appartient aussi à la médiatrice de [BC]

Conclusion : J est le point d'intersection de deux médiatrices des côtés du triangle rectangle ABC. Or, le point d'intersection de deux médiatrices est également le point de concours des trois médiatrices. **Le milieu J de son hypoténuse [BC] est donc le centre du cercle circonscrit au triangle rectangle ABC.**

3°) BILAN :

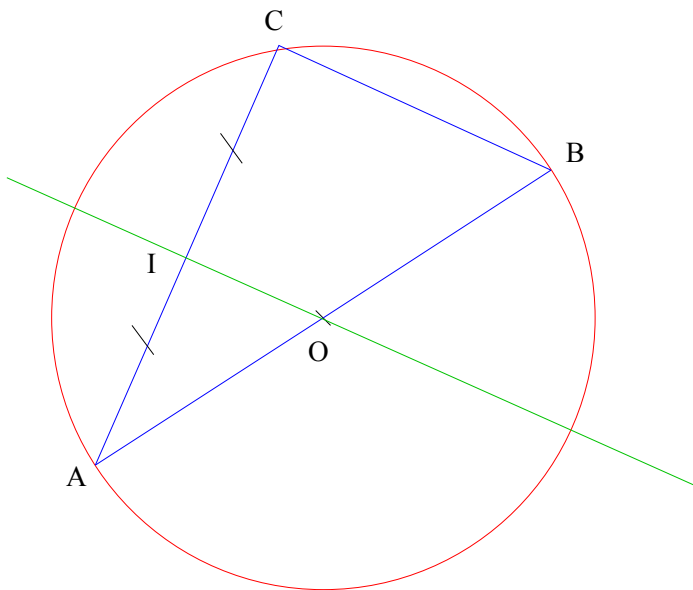
Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.

ACTIVITE 2 : 1°) Observations



✗ L'angle \widehat{BAC} semble être droit.

2°) Démonstration



a) Par hypothèse, C est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

D'après la définition d'un **cercle** on a $OA = OC$.

D'après la propriété caractéristique de la médiatrice, O appartient à la **médiatrice de $[AC]$**

I étant le milieu de $[AC]$, I est aussi sur la médiatrice de $[AC]$.

Donc (IO) est la médiatrice de $[AC]$.
D'après la définition de la médiatrice on a : **$(IO) \perp (AC)$** .

b) Mais (IO) passe par **le milieu $[AB]$** du triangle ABC.

D'après la propriété de la droite des milieux dans un triangle, on a **(IO) parallèle à (CB)**

c) Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire **à l'une est perpendiculaire** à l'autre.

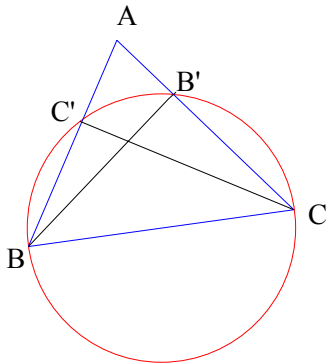
Donc $(AC) \perp (CB)$ et le triangle ABC est **rectangle en C**.

3°) BILAN

Si le point C appartient au cercle de diamètre $[AB]$, alors le triangle ABC est rectangle en C.

Exercice n°6 :

On considère un triangle quelconque ABC . Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe $[AB]$ en C' et $[AC]$ en B' . Démontrez que $[BB']$ et $[CC']$ sont des hauteurs du triangle ABC .



1. Démontrons que $BB'C$ est un triangle rectangle en B'

On sait que $[BC]$ est un diamètre du cercle et B' est un point du cercle.

D'après la propriété : **Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.**

Donc : $BB'C$ est un triangle rectangle en B' .

2. Démontrons que $BC'C$ est un triangle rectangle en C'

On sait que $[BC]$ est un diamètre du cercle et C' est un point du cercle.

D'après la propriété : **Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.**

Donc : $BC'C$ est un triangle rectangle en C' .

3. Démontrons que $[BB']$ et $[CC']$ sont des hauteurs du triangle ABC .

On sait que :

- (BB') est perpendiculaire à $[AC]$ car $BB'C$ est un triangle rectangle en B' et B' est un point de $[AC]$.

- (CC') est perpendiculaire à $[AB]$ car $BC'C$ est un triangle rectangle en C' et C' est un point de $[AB]$.

Or par définition : **Dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.**

Conclusion : **Dans le triangle ABC ; $[BB']$ est la hauteur relative au côté $[AC]$ et $[CC']$ est la hauteur relative au côté $[BA]$.**

Exercice n°7 :

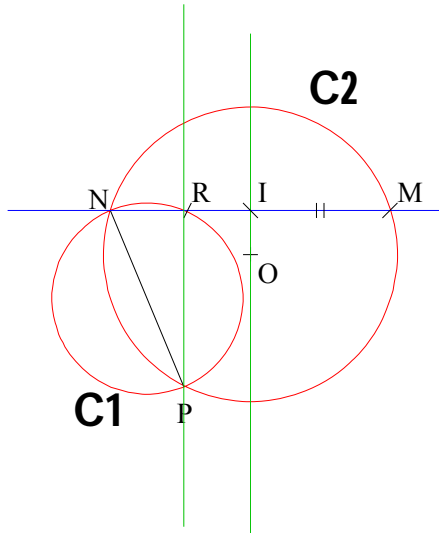
Trace un cercle de centre O.

Place les points M, N et P sur ce cercle.

Trace le cercle de diamètre [NP]. Ce cercle coupe la droite (MN) en un point nommé R.

Soit I le milieu du segment [MN].

Démontre que les droites (OI) et (PR) sont des droites parallèles.



1. Démontrons que (NR) est perpendiculaire à (NM)

On sait que [NP] est un diamètre du cercle **C1** et R est un point du cercle.

D'après la propriété : **Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.**

Donc : NRP est un triangle rectangle en R.

Ainsi : Comme R est un point de [MN], alors **(NR) est perpendiculaire à (MN)**

2. Démontrons que (OI) est perpendiculaire à (MN)

On sait que N et M sont deux points situés à égale distance de O car M et N sont deux points du cercle **C2**

D'après la propriété : **Si un point se trouve à égale distance des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.**

Donc O appartient à la médiatrice de [NM].

De plus comme I est le milieu de [NM], alors par définition de la médiatrice, (OI) est la médiatrice du segment [MN].

Ainsi : **(OI) est perpendiculaire à (NM)**

3. Démontrons que (IO) et (PR) sont parallèles

On sait que : (IO) perpendiculaire à (MN) et (PR) perpendiculaire à (MN).

D'après la propriété : **Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.**

Conclusion : Les droites (OI) et (PR) sont parallèles.

ACTIVITE 3 :

- A - 1°) Construire un triangle ABC tel que $BC = 40 \text{ mm}$, $AB = 32 \text{ mm}$, $AC = 24 \text{ mm}$.
2°) Calculer le carré de chacune de ces longueurs.
3°) Vérifier que le carré d'un côté de ce triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
4°) Vérifier avec l'équerre que le triangle ABC est rectangle en A.
5°) Vérifier que le triangle ABC est rectangle en A en traçant le cercle de diamètre [BC] et en vérifiant que le point A est situé sur ce cercle.

B - **BILAN :** Cette propriété est admise sans démonstration

Complète :

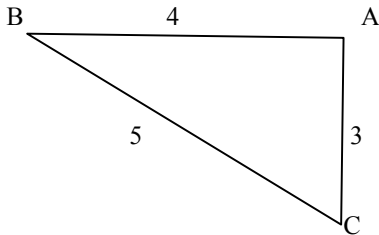
Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la **somme** des **carrés** des autres **côtés** , alors ce triangle est **rectangle** et son hypoténuse est son plus grand côté.

Cette propriété s'appelle la **réci-proque du théorème de Pythagore**.

C - « Soyons logique »

Voici deux fragments d'exercices un peu incomplets mais justes, relevés sur les copies de Jérémie et de Lydie :

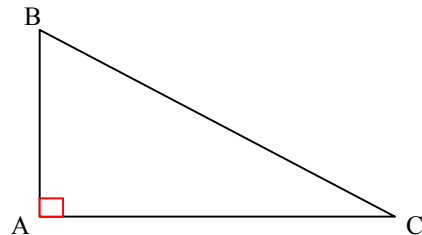
Copie de Jérémie :



$$\left. \begin{array}{l} 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \\ 5^2 = 25 \end{array} \right\} \text{ donc } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Je peux donc affirmer que le triangle ABC est rectangle en A.

Copie de Lydie :



Comme le triangle ABC est rectangle en A, je peux affirmer que $AB^2 + AC^2 = BC^2$

- Dans la copie de Jérémie :
 - Quelles sont les données ?
 - Quelle est sa conclusion ?
 - Quelle propriété a-t-il utilisée ?
- Mêmes questions pour la copie de Lydie.

Exercice n°13 :

Pour vérifier que 2 montants d'une porte sont bien Perpendiculaires, un menuisier mesure 60 cm sur Un montant et 80 cm sur l'autre. Il mesure la Distance entre les 2 traits obtenus et trouve 1 m. Il est satisfait de son travail.

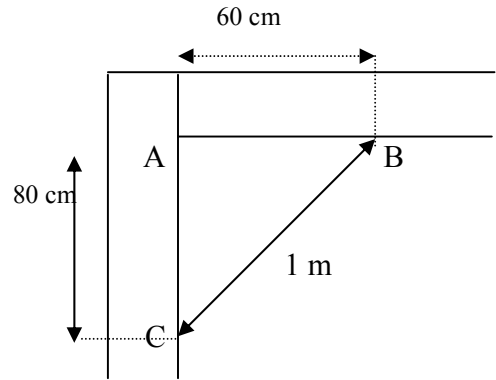
A-t-il raison ?

$$CB = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

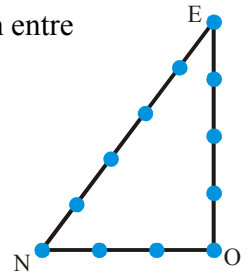
Dans le triangle ABC, on a : $CB^2 = 100^2 = 10\,000$

$$\text{et } AC^2 + AB^2 = 80^2 + 60^2 = 6\,400 + 3\,600 = 10\,000$$

Comme $CB^2 = AC^2 + AB^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A et donc le menuisier peut-être satisfait.



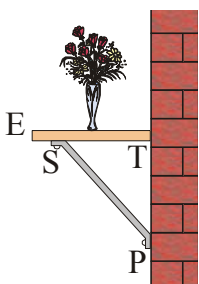
Exercice n°14 : En Mésopotamie, pendant l'antiquité on utilisait des cordes à nœuds (avec 1 m entre chaque nœud) pour obtenir des angles droits dans les constructions d'autels religieux. Explique pourquoi cette corde à nœuds bien tendue donne un angle droit.



Dans le triangle ONE, on a : $NE^2 = 5^2 = 25$

$$\text{et } NO^2 + OE^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Comme $NE^2 = NO^2 + OE^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle NOE est rectangle en O.



Exercice n°15 :

On a fixé au mur une étagère [ET] en la soutenant par un support [SP].

$$ST = 17,6 \text{ cm}$$

$$TP = 33 \text{ cm}$$

$$SP = 37,4 \text{ cm.}$$

On suppose que le mur est vertical.

L'étagère est-elle horizontale ?

Dans le triangle STP rectangle en T, on a : $SP^2 = 37,4^2 = 1\,398,76$

$$\text{Et } ST^2 + TP^2 = 17,6^2 + 33^2 = 1\,398,76$$

Comme $SP^2 = ST^2 + TP^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle STP est rectangle en T et ainsi l'étagère est horizontale.

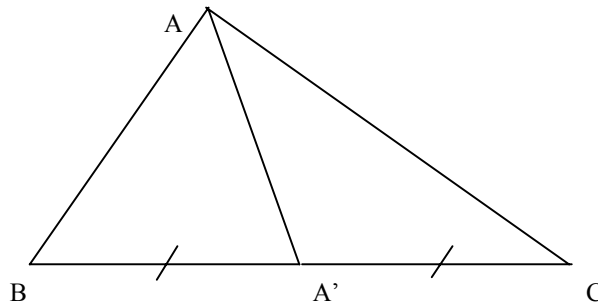
ACTIVITE 4 :

Pour chacun d'eux :

- Trace la médiane $[AA']$ issue de A, A' étant le pied de la hauteur issue de A.
- Mesure la longueur de la médiane $[AA']$ et la longueur du côté $[BC]$. *Que remarques-tu ? : la moitié.*
- Mesure, à l'aide du rapporteur, la mesure de l'angle \hat{BAC} .
 - L'angle \hat{BAC} semble être angle droit.
 - L'angle \hat{BAC} ne semble pas être droit.

d) *Que peux-tu conjecturer ? : Si dans un triangle, la longueur d'une médiane relativement à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté, alors ce triangle est rectangle et le côté en question en est l'hypoténuse.*

2°) Démonstration :



On considère le triangle ABC tel que $AA' = \frac{BC}{2}$. Montrons que le triangle ABC est rectangle en A.

* A' est le milieu de $[BC]$ et $AA' = \frac{BC}{2}$ donc $AA' = BA' = CA'$

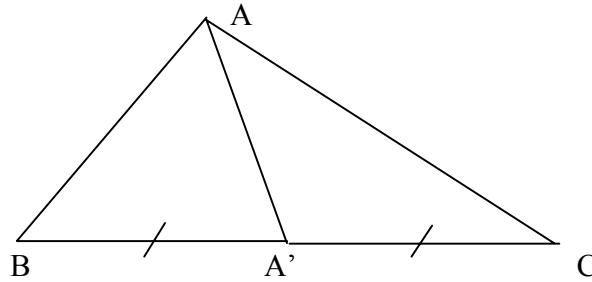
- Donc le triangle ABC est inscrit dans le **cercle** de centre A'
- $[BC]$ est un de ses diamètre et $[AA']$, $[BA']$ et $[CA']$ sont des rayons de ce cercle.

Conclusion : Le triangle ABC est **rectangle** en A.

3°) BILAN : Complète :

Si dans un triangle, la médiane relative à un côté mesure la **moitié** de ce côté, alors le triangle est **rectangle**.

Exercice n°16 : Le segment $[AA']$ est une médiane du triangle ABC . On sait que $BA' = 27$ mm et $AA' = 28$ mm.



Les informations ci-dessus suffisent pour affirmer que l'angle \widehat{BAC} n'est pas droit. Expliquer pourquoi.

On a : $\frac{1}{2} BC = BA' = 27$ mm et $AA' = 28$ mm

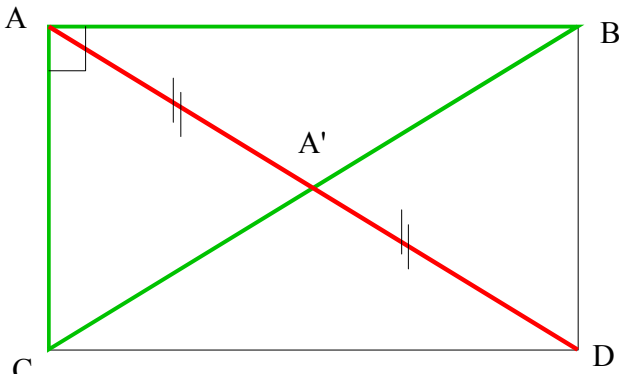
Comme $AA' \neq \frac{1}{2} BC$, alors le triangle n'est pas rectangle et donc l'angle \widehat{BAC} n'est pas droit.

Car si dans un triangle, la médiane relative à un côté mesurait la moitié de ce côté, alors le triangle serait rectangle.

Exercice n°17 :

Trace un triangle ABC rectangle en A . Trace la médiane issue de A . Appelle A' le pied de cette médiane. Soit D le symétrique du point A dans la symétrie centrale de centre A' .

Démontre que le quadrilatère $ABDC$ est un rectangle.



1. Calcul de AD

Comme D est le symétrique de A par rapport à A' , alors :

$$AD = 2 AA' \quad (1)$$

2. Calcul de CB

On sait que : - ABC est un triangle rectangle en A ,
 - $[AA']$ est la médiane issue de A .

Si un triangle est rectangle, alors la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse.

Donc : $CB = 2 AA' \quad (2)$

Conséquence : D'après les relations (1) et (2), $AD = CB$

1. Nature du quadrilatère

On sait que : - $AD = CB$
 - A' milieu de $[AD]$ et $[CB]$

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et ont la même longueur, alors c'est un rectangle.

Conclusion : $ABDC$ est un rectangle.

Exercice n°19

Dans chacun des cas suivants, calcul AB

Figure 1 :

On sait que : - ADC est un triangle rectangle en A ;
- [AB] est la médiane issue de A.

Si un triangle est rectangle alors la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse.

Donc : $AB = \frac{1}{2} CD = 5 : 2 = 2,5$.

Conclusion : $AB = 2,5$ cm.

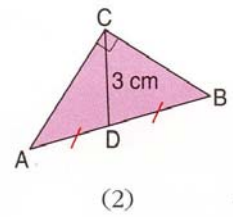
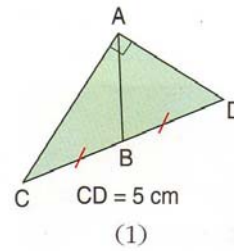


Figure 2 :

On sait que : - ABC est un triangle rectangle en C ;
- [CD] est la médiane issue de C.

Si un triangle est rectangle alors la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse.

Donc : $CD = \frac{1}{2} AB$ soit $AB = 2 \times 3 = 6$

Conclusion : $AB = 6$ cm.

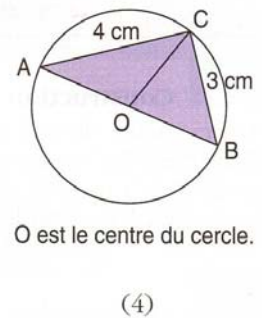
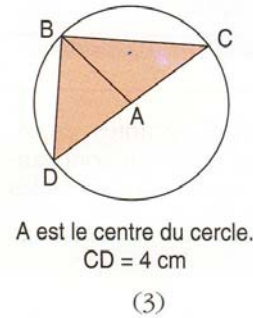


Figure 3 :

Démontrons que BCD est un triangle rectangle

On sait que : - [CD] est un diamètre du cercle.
- B un point du cercle.

Or, si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.

Conclusion : BDC est un triangle rectangle en B

Calcul de AB

On sait que : - BDC est un triangle rectangle en B ;
- [AB] est la médiane issue de B.

Si un triangle est rectangle alors la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse.

Donc : $AB = \frac{1}{2} CD = 4 : 2 = 2$.

Conclusion : $AB = 2$ cm.

Figure 4 :

Démontrons que ACB est un triangle rectangle

On sait que : - [AB] est un diamètre du cercle.
- C un point du cercle.

Or, si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.

Conclusion : ABC est un triangle rectangle en C

2°) Calcul de longueur du segment [AB]

Dans le triangle ABC rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AB^2 = 16 + 9$$

$$AB^2 = 25$$

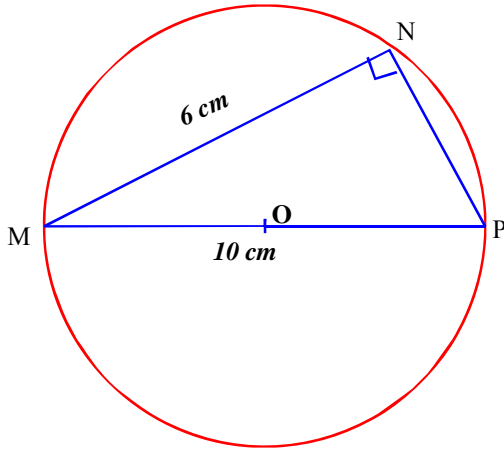
$$AB = 5$$

Conclusion: $AB = 5$ cm

Exercice n°20 :

Un cercle de centre O a un diamètre [MP] tel que $MP = 10$ cm. On place un point N sur le cercle tel que $MN = 6$ cm.

Calcule l'aire du triangle MNP.



1°) Démontrons que MNP est un triangle rectangle

On sait que : - [MP] est un diamètre du cercle.

- N un point du cercle.

Or, si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.

Conclusion : **MNP est un triangle rectangle en N**

2°) Calcul de longueur du segment [NP]

Dans le triangle MNP rectangle en N, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$MP^2 = MN^2 + NP^2$$

$$10^2 = 6^2 + NP^2$$

$$NP^2 = 100 - 36$$

$$NP^2 = 64$$

$$NP = 8$$

Conclusion: **NP = 8 cm**

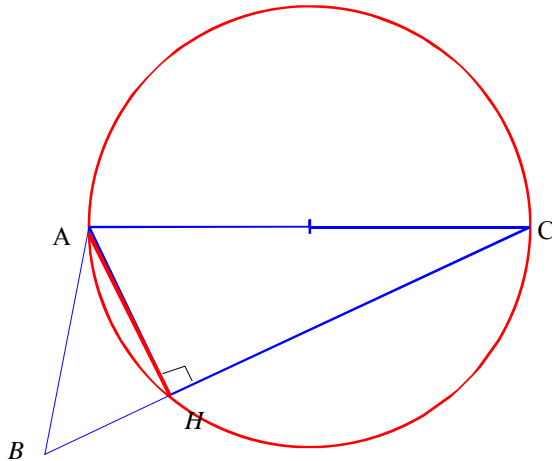
3°) Calcul de l'aire du triangle MNP.

$$\text{On a : Aire} = \frac{MN \times NP}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 24$$

Conclusion : **l'aire du triangle MNP est égale à 24 cm²**

Exercice n°21

Dans un triangle ABC, la hauteur issue de A coupe (BC) en H. Démontre que le cercle de diamètre [AC] passe par H.



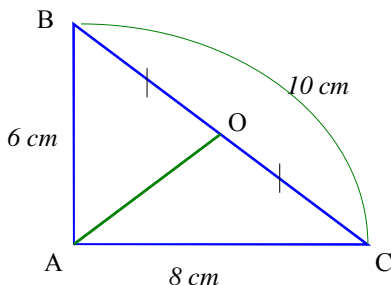
On sait que : - ABC est un triangle rectangle en H car [AH] est la hauteur issue de A.
- [AC] est un diamètre de son cercle circonscrit.

D'après la propriété : Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.

Conclusion : **le point H appartient au cercle de diamètre [AC].**

Exercice n°22

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$ et $BC = 10 \text{ cm}$. La médiane issue de A coupe [BC] en O. Calcule AO.



Démontrons la nature du triangle ABC

Dans le triangle ABC, on a : $BC^2 = 10^2 = 100$

$$AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABC est rectangle en A.**

Calcul de AO

On sait que : - ABC est un triangle rectangle en A ;
- [AO] est la médiane issue de A.

Si un triangle est rectangle alors la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse.

Donc : $AO = \frac{1}{2} CB = 10 : 2 = 5$.

Conclusion : $AO = 5 \text{ cm}$.

Exercice n°23 :

Soit un cercle de diamètre $[MP]$ tel que $MP = 10$ cm, et un point N sur le cercle tel que $MN = 6$ cm. Calcule l'aire du triangle MNP .

1. Démontrons que MNP est un triangle rectangle.

On sait que : $[PM]$ est un diamètre du cercle et N un point de ce cercle.

Si un triangle est inscrit dans un cercle et à pour côté un diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse de ce triangle.

Donc : **MNP est un triangle rectangle en N .**

2. Calcul de NP .

On sait que MPN est un triangle rectangle en N . D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$MP^2 = MN^2 + NP^2$$

$$10^2 = 6^2 + NP^2$$

$$100 = 36 + NP^2$$

$$NP^2 = 100 - 36$$

$$NP^2 = 64$$

$$NP = \sqrt{64}$$

$$NP = 8$$

Conclusion : **$NP = 8$ cm**

3. Calcul de l'aire du triangle MNP .

$$\text{On a : Aire} = \frac{MN \times NP}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

Conclusion : **L'aire du triangle MNP est égale à 24 cm^2**