Thème N°11: CALCUL LITTERAL (1) 4-ème

Pour prendre un bon départ

Exercice n°1 : Le signe × (multiplier) peut être sous-entendu dans différentes situations.

- entre un nombre et une lettre : $3x$ signifie $3 \times x$
- entre deux lettres : xy signifie $x \times y$
- entre un nombre et une parenthèse : $2\,(x + y)$ signifie $2 \times (x + y)$
- entre une lettre et une parenthèse : $(4 + x)\,y$ signifie $(4 + x) \times y$
- entre deux parenthèses : $(y + 7)(x + 4)$ signifie $(y + 7) \times (x + 4)$
- Remarque : Le produit de x par x se note x^2 : x^2 signifie $x \times x$.

Supprime les signes × quand c'est possible.

$3 \times a \times b = 3ab$; $3 \times a - 5 \times b = 3a - 5b$; $a \times (b + 3) = a(b + 3)$; $2 \times y \times y = 2y^2$

$7 \times a \times b = 7ab$; $(7 + a) \times (b + 5) = (7 + a)(b + 5)$; $(a + 5 \times b) \times 3 - 2 \times c \times c = 3(a + 5b) - 2c^2$

Exercice n°2 : Afin de connaître le poids du menhir qu'il doit fournir au client, le livreur de menhirs applique l'une des formules suivantes.
(A, a et h sont en dm et P en kg).

- La formule de Lutèce :

$P = 0{,}302\pi hAa$ *$P \approx 493{,}36$* *$P \approx 1\,987{,}42$*

- La formule de pictave :

$P = 0{,}306h(2A^2 + a^2)$ *$P \approx 536{,}11$* *$P \approx 1\,996{,}88$*

- La formule arverne :

$P = \dfrac{\pi h}{10}(A^2 + a^2 + Aa)$ *$P \approx 501{,}40$* *$P \approx 1\,980{,}85$*

- La formule de Guy l'an neuf :

$P = \dfrac{\pi h}{30}(5A^2 + 4a^2)$ *$P \approx 521{,}50$* *$P \approx 2\,006{,}14$*

- La formule armoricaine :

$P = 1{,}22h(0{,}4A^2 + 0{,}2Aa + 0{,}15a^2)$ *$P \approx 529{,}97$* *$P \approx 1\,987{,}79$*

Deux modèles sont à livrer.
- Un grand menhir : $h = 21$ dm , $A = 10{,}5$ dm , $a = 9{,}5$ dm.
- Un petit menhir : $h = 16$ dm , $A = 6{,}5$ dm , $a = 5$ dm.

Essaye les cinq formules avec les dimensions mesurées.

Exercice n° 4 : Maîtriser le vocabulaire : **somme - termes - produit - facteurs**

Complète :

- $4 + 6 - 8$ est une somme algébrique ; 4 , 6 et - 8 sont les termes de la somme.
- $x + y - z$ est une somme algébrique ; x , y et $-z$ sont les termes de la somme.

Les termes sont les expressions que l'on ajoute ou que l'on retranche.

- $2 \times 3 \times (-8)$ est un produit ; 2 , 3 et - 8 sont les facteurs du produit.
- $xy(-3)$ est un produit ; x , y et (-3) sont les facteurs du produit.

Avec des expressions moins évidente :

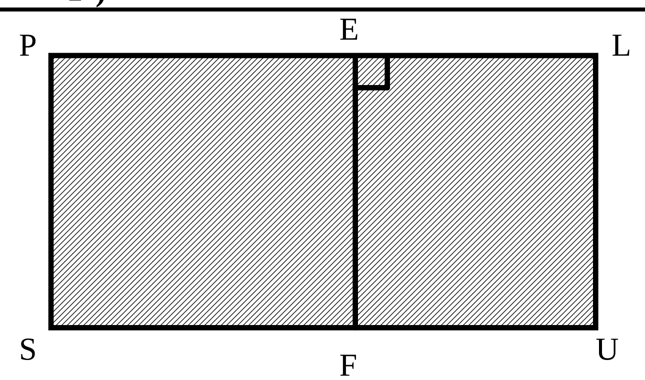
- $4 + 3 \times 4$ est une somme car s'est l'addition que l'on fait en dernier lieu ; 4 et 3×4 sont les deux termes de la somme.
- $x + 3y$ est une somme dont les termes sont x et $3y$

- $(4+5) \times 3$ est un produit car c'est la multiplication que l'on fait en dernier lieu ; $(4+5)$ et 3 sont les deux facteurs du produit.
- $(x+3)\,y$ est un produit dont les facteurs sont : $(x+3)$ et y
- $(5+3)(y+6)$ est un produit dont les facteurs sont : $(5+3)$ et $(y+6)$
- $4 + 3 \times 5 + 7$ est une somme dont les termes sont : 4 ; 3×5 et 7
- $x + 3y + 8$ est une somme dont les termes sont : x ; $3y$ et 8
- $3x(-y)$ est un produit dont les facteurs sont : 3 ; x et $(-y)$
- $4x - y$ est une somme dont les termes sont : $4x$ et $-y$

Faire des phrases sur le modèle des exemples précédente avec les expressions suivantes :
$7 + 4 \times a$ est … ; $(8 + a) \times 5$ est … ; $9ab$ est … ; $7(a+b)$ est … ; $4 + ab$ est …
$4x + 5y$ est … ; $a + bc + d$ est … ; $(a+b)c + d$ est … ; $a + b(c+d)$ est … ;
$(a+b)(c+d)$ est … ; $b^2 + ac$ est … .

<u>Exercice n°5 :</u> Traduire les expressions suivantes en écriture mathématiques usuelle :
<u>Exemple :</u> « la somme de a et b » se note $a + b$
« le double de x » se note $2x$
N°1 : « le carré de x » se note x^2
N°2 : « la différence de a et b » se note $a - b$
N°3 : « le produit de a par b » se note ab
N°4 : « la somme des carrés de a et b » se note $a^2 + b^2$
N°5 : « le carré de la somme de a et b » se note $(a + b)^2$
N°6 : « le produit de 8 par $2x + 4$ » se note $8(2x + 4)$
N°7 : « le produit de a par la somme de b et c » se note $a(b + c)$
N°8 : « le produit de la somme de a et b par c » se note $c(a + b)$
N°9 : « la somme de a et du produit de b par c » se note $a + bc$
N°10 : « la différence du carré de a et du carré de b » se note $a^2 - b^2$

<u>Exercice n°6 :</u> **<u>Revoir la distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction</u>**
A) <u>Distributivité de la multiplication sur l'addition</u>
1°)



PE = 3 cm ; EL = 2 cm ; LU = 2,4 cm

On veut calculer de deux manières l'aire du rectangle PLUS.

- Calcul direct :

Aire(PLUS) = $2{,}4 \times (3 + 2)$ = 12 (cm²)

- En considérant l'aire du rectangle PLUS comme la somme de deux rectangles :

Aire(PLUS) = Aire(PEFS) + Aire(ELUF)

Aire(PLUS) = $3 \times 2{,}4 + 2 \times 2{,}4$

Aire(PLUS) = 12 (cm²)

En comparant les deux résultats, complète : $2{,}4 \times (2 + 3) = 2{,}4 \times 2 + 2{,}4 \times 3$
Ce résultat est peut-être généralisé de la façon suivante : Si k, x et y désignent des nombres quelconques,
Alors :

$k \times (x + y) = k \times x + k \times y$ ou $k \times x + k \times y = k \times (x + y)$	$(x + y) \times k = x \times k + y \times k$ ou $x \times k + y \times k = (x + y) \times k$

On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition

2°) Calcule de 2 manières :

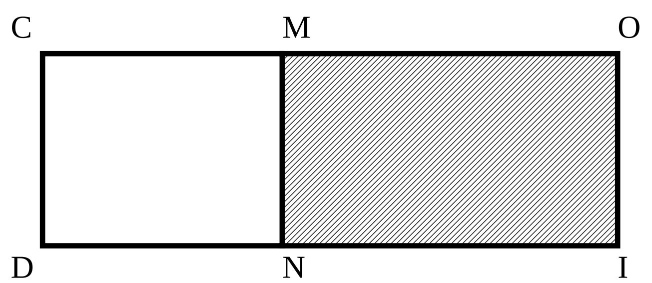
	Calcul direct avec respect des conventions	Utilisation de la distributivité
$5 \times (7 + 6)$	$5 \times 13 = 65$	$5 \times 7 + 5 \times 6 = 35 + 30 = 65$
$3 \times (7 + 5)$	$3 \times 12 = 36$	$3 \times 7 + 3 \times 5 = 21 + 15 = 36$
$8 \times (7 + 6 + 1)$	$8 \times 14 = 112$	$8 \times 7 + 8 \times 6 + 8 \times 1 = 56 + 48 + 8 = 112$
$(999 + 1) \times 6$	$1\,000 \times 6 = 6\,000$	$6 \times 999 + 6 \times 1 = 5\,994 + 6 = 6\,000$

3°) Encadre les relations exactes et raye les inexactes :

$\cancel{2 \times (5 + 8) = 2 \times 5 + 8}$	$\cancel{a + (b \times c) = a + b \times c + c}$	$\boxed{9 \times 1 + 9 \times 2 = (1 + 2) \times 9}$
$\cancel{a \times (b + c) = a \times b + c}$	$\cancel{k \times x + k \times y = k + (x \times y)}$	$\boxed{k \times x + k \times y = (x + y) \times k}$
$\boxed{8 \times (1 + 4) = 8 \times 1 + 4 \times 8}$	$\cancel{7 \times 5 + 1 = 7 \times 5 + 7 \times 1}$	$\boxed{6 \times 2 + 3 \times 6 = 6 \times (2 + 3)}$
$\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$	$\cancel{a \times b + c = a \times b + a \times c}$	$\boxed{k \times x + y \times k = k \times (x + y)}$
$\cancel{3 + (5 \times 4) = 3 + 5 \times 3 + 4}$	$\boxed{k \times x + k \times y = k \times (x + y)}$	

B) Distributivité de la multiplication sur la soustraction

1°)



CO = 5,5 cm; CM = 2,5 cm; OI = 2 cm

On veut calculer de deux manières l'aire du rectangle MOIN.

- Calcul direct :

Aire(MOIN) = $(5{,}5 - 2{,}5) \times 2 = 6$ (cm²)

- En considérant l'aire du rectangle MOIN comme la différence de deux rectangles :

Aire(MOIN) = Aire(COID) - Aire(CMND)

Aire(MOIN) = $5{,}5 \times 2 - 2{,}5 \times 2$

Aire(MOIN) = 6 (cm²)

En comparant les deux résultats, complète : $2 \times (5{,}5 - 2{,}5) = 2 \times 5{,}5 - 2 \times 2{,}5$

Ce résultat est peut-être généralisée de la façon suivante : Si k, x et y désignent des nombres quelconques,

Alors :

$k \times (x - y) = k \times x - k \times y$ ou $k \times x - k \times y = k \times (x - y)$	$(x - y) \times k = x \times k - y \times k$ ou $x \times k - y \times k = (x - y) \times k$

On dit que la multiplication est distributive par rapport à la soustraction

2°) Calcule de 2 manières :

	Calcul direct avec respect des conventions	Utilisation de la distributivité
$4 \times (7 - 5)$	$4 \times 2 = 10$	$4 \times 7 - 4 \times 5 = 28 - 20 = 8$
$7 \times (9 - 4)$	$7 \times 5 = 35$	$7 \times 9 - 7 \times 4 = 63 - 28 = 35$
$8 \times (7 - 6 - 1)$	$8 \times 0 = 0$	$8 \times 7 - 8 \times 6 - 8 \times 1 = 56 - 48 - 8 = 0$
$(3\,002 - 2) \times 4$	$3\,000 \times 4 = 12\,000$	$3\,002 \times 4 - 2 \times 4 = 12\,008 - 8 = 12\,000$

3°) Encadre les relations exactes et raye les inexactes :

$\boxed{a \times (b - c) = a \times b - a \times c}$	~~k × x - k × y = k - (x × y)~~	$\boxed{k \times x - k \times y = k \times (x - y)}$
~~a × (b - c) = a × b – c~~	~~a - (b × c) = a - b × c - c~~	$\boxed{k \times x - k \times y = (x - y) \times k}$
~~18 × (9 - 4) = 18 × 9 - 4 × 8~~	~~5 × 5 - 1 = 5 × 5 - 5 × 1~~	~~a × b - c = a × b - a × c~~
$\boxed{k \times x - y \times k = k \times (x - y)}$	$\boxed{6 \times 2 - 3 \times 6 = 6 \times (2 - 3)}$	~~6 × (3 - 4) = 6 × 3 – 4~~
~~46 - (4 × 5) = 46 - 4 × 5 - 46~~	$\boxed{4 \times 8 - 4 \times 5 = (8 - 5) \times 4}$	

ACTIVITE 1 : Différencier un « développement » d'une « factorisation »

1°) Il a été demandé à un élève de quatrième de traiter l'exercice suivant :

> **Développer, c'est transformer un produit de facteurs en une somme de termes**
>
> **Factoriser, c'est transformer une somme de termes en un produit de facteurs**

2°) On dira que $7 \times x + 7 \times 2$ (ou $7x + 14$) est une expression développée, et, $9(2y + 3)$ est une expression factorisée.
En utilisant les expressions de départ ainsi que les solutions justes de l'exercice traiter par l'élève, complète le tableau ci-dessous.

Les expressions développées sont :	Les expressions factorisées sont :
H = 21 + 63 ; I = 54 – 30 ; J = $14x + 21$ K = $6a - 15b$ 8x + 28 ; 18a – 3b ; $x^2 + 2x + 3x + 6$ $2x^2 - 10x - 4x + 20$; $6 \times 9 - 6 \times 5$ $7 \times 2x + 7 \times 3$	A = $8 \times (5 + 9)$; B = $8 \times (9 - 4)$; C = $4(2x + 7)$ D = $3(6a - b)$; E = $(7 + 3) \times (2 + 5)$ F = $(x + 3)(x + 2)$; G = $(2x - 4)(x - 5)$ $7 \times (3 + 9)$ $3(2a - 5b)$

Exercice n°7 : Pour chaque expression ci-dessous, dire quelle est la question que l'on pourrait demander.
Complète par : **Développer** ou **Factoriser**.

$\frac{2}{3}b - b + \frac{1}{2}b$ factoriser
$-3x + 8x$ factoriser
$(4x + 5)(2x + 3)$ développer
$7x - 11x$ factoriser
$(x + 1)(x + 2)$ développer
$\frac{3}{2}x^3 - x^3$ factoriser
$(4 - 5x)(8x - 3)(x + 9)$ développer
$-3x^2 - 7x^2$ factoriser
$(-5x + 3)(-3x - 5)$ développer
$5\pi x - \pi x - 4\pi x$ factoriser

$2(-3x - 4)$ développer
$1{,}2x + 2{,}5x$ factoriser
$\frac{3}{2}\left(4x + \frac{5}{3}\right) - \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}x - \frac{6}{5}\right)$ développer
$2a - 5a + 12a$ factoriser
$5(2x - 5)(3x + 5)$ développer
$7ab - 3ab + 18ab$ factoriser

$3(-2x + 5)$ développer

$2x^2 - 5x^2$ factoriser

Exercice n°8 : Dire si les expressions ci-dessous sont sous forme développée ou factorisée :

$7(8x + 9)$ forme factorisée
$15 + 12$ forme développée
$\frac{7}{3}(5x+2)$ forme factorisée
$\frac{3}{12}y\left(\frac{5}{3}y+\frac{1}{4}x\right)$ forme factorisée
$9a^3$ forme factorisée
$825x - 8\,250$ forme développée
$(x - 25)(3x + 8)(8x - 1)$ forme factorisée

$4x^2 + 8x + 4$ forme développée
$24m^2 - 30m$ forme développée
$(2x - 4)^2$ forme factorisée
$\frac{2}{7}\left(\frac{5}{3}x+\frac{5}{11}\right)$ forme factorisée
$a^2 + 2a + 7$ forme développée
$(3x + 2)(4x - 5)$ forme factorisée
$a(a + 2) + 2a$ forme développée

Exercice n°9 : Développer en utilisant la distributivité.

$8(3x + 2) = 8 \times 3x + 8 \times 2 = 24x + 16$
$7(4x - 1) = 7 \times 4x - 7 \times 1 = 28x - 7$
$9(u - v) = 9 \times u - 9 \times v = 9u - 9v$
$9x(2y + 7) = 9x \times 2y + 9x \times 7 = 18xy + 63x$
$x(3x + 2) = x \times 3x + x \times 2 = 3x^2 + 2x$
$5(y - 6) = 5 \times y - 5 \times 6 = 5y - 30$
$12(10a + 12b) = 12 \times 10a + 12 \times 12b = 120a + 144b$
$4(2x + 3) = 4 \times 2x + 4 \times 3 = 8x + 12$

Exercice n°10 : REDUIRE une somme

$8x + 12x = 20x$
$4a - 2 =$
$5x + 4x - 2x = 7x$
$5x + 2y =$
$8x - 2x = 6x$

$25x - 15x - 5x = 5x$
$3x + 2x = 5x$
$2x + 3 =$
$4x + x + 5y = 5x + 5y$
$2x + 3 + 8x + 4 = 10x + 7$

Attention à ne pas confondre sommes et produits de puissances de *x*

Somme	Produit
$2x + 7 =$	$2x \times 7 = 14x$
$x + x = 2x$	$x \times x = x^2$
$x + 3x = 4x$	$x \times 3x = 3x^2$
$2x + 3x = 5x$	$2x \times 3x = 6x^2$
$2x + 3x^2 =$	$2x \times 3x^2 = 6x^3$
$2x + 3y =$	$2x \times 3y = 6xy$

Exercice n°11 : Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 3(x+5) - 4(x-2)$
$A = 3x + 15 - 4x + 8$
$A = 23 - x$

$B = 4(2x-7) + 2(5-4x)$
$B = 8x - 28 + 10 - 8x$
$B = -18$

$C = (2x+1) + 10(5+3x)$
$C = 2x + 1 + 50 + 30x$
$C = 51 + 32x$

$$D = 2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)+6\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{12}\right)$$

$$D = x+\frac{1}{2}+2x-\frac{1}{2}$$

$D = 3x$

E = 2 (a + 3) – 5 (b – 4)
E = 2a + 6 – 5b + 20
E = 26 + 2a - 5b

F = - 3 (3 – a) – 4 (3 – b)
F = - 9 + 3a - 12 + 4b
F = - 21 +3a + 4b

G = 9 (4 – a + b) – 3 (5 – 3a + 3b)
G = 36 - 9a + 9b - 15 + 9a - 9b
G = 21

H = (2a – 3) – 2 (- 5 – b)
H = 2a - 3 + 10 + 2b
H = 7 + 2a + 2b

I = a (a – 2) – a (3 + a)
I = a^2 - 2a - 3a - a^2
I = - 5a

J = a (b – a) + b (a + b)
J = ab - a^2 + ab + b^2
J = 2ab - a^2 + b^2

Exercice n°12 : Développe et réduis les expressions suivantes :

$A = 11 + 2(x+1) + 3x$
$A = 11 + 2x + 2 + 3x$
$A = 5x + 13$

$B = 7y + 3(6-y) + 2$
$B = 7y + 18 - 3y + 2$
$B = 4y + 20$

$C = 2(5+2x) + 3(x-4)$
$C = 10 + 4x + 3x - 12$
$C = 7x - 2$

$D = -5(2y+7) + 4(7+3y)$
$D = -10y - 35 + 28 + 12y$
$D = 2y - 7$

$E = 6 - 4(3x+8)$
$E = 6 - 12x - 32$
$E = -12x - 26$

$F = -3y + 3(5y+6) + 2y$
$F = -3y + 15y + 18 + 2y$
$F = 14y + 18$

$G = -2x - 7(3x+5) + 1$
$G = -2x - 21x - 35 + 1$
$G = -23x - 34$

$H = -3(y+4) - 2(4-2y)$
$H = -3y - 12 - 8 + 4y$
$H = y - 20$

ACTIVITE 2 : Parenthèses précédées du signe plus ou du signe moins

A . Découvertes

1. Complète les quatre tableaux ci-dessous :

a	b	c	b + c	a + (b + c)	a + b + c
2	3	4	7	9	9
4	2	- 3	- 1	3	3
- 3	- 4	2	- 2	- 5	- 5

a	b	c	b - c	a + (b - c)	a + b - c
2	3	4	- 1	1	1
4	2	- 3	5	9	9
- 3	- 4	2	- 6	- 9	- 9

a	b	c	b + c	a – (b + c)	a – b - c
2	3	4	7	-5	-5
4	2	- 3	-1	5	5
- 3	- 4	2	-2	-1	-1

a	b	c	b - c	a – (b - c)	a – b + c
2	3	4	-1	3	3
4	2	- 3	5	-1	-1
- 3	- 4	2	-6	3	3

2. En observant les résultats obtenus dans les tableaux précédents, complète les deux égalités suivantes.

Pour tout nombre relatif a , b et c :

a + (b + c) = a + b + c **a + (b - c) = a + b - c**

a - (b + c) = a - b - c **a - (b - c) = a - b + c**

Exercice n°13 :

$A = -1 + (4x + 5x) + (2 - x) = -1 + 4x + 5x + 2 - x = 8x + 1$

$B = (3 + 4x) - (-3 - 3x) = 3 + 4x + 3 + 3x = 7x + 6$

$C = 3 - (x + y) + (2x - 3y) = 3 - x - y + 2x - 3y = x - 4y + 3$

$D = -4 + (3 - 6z) - (3 + t) = -4 + 3 - 6z + 3 - t = -6z - t + 2$

$E = (6 + y) - (3 - 10y) = 6 + y + 3 + 10y = 11y + 9$

Exercice n°14 :

$A = (2x + 7) + (3x - 6) = 2x + 7 + 3x - 6 = 5x + 1$

$B = (3 - 5x) - (-3 + 6y) = 3 - 5x + 3 - 6y = -5x - 6y + 6$

$C = -2 + (5 - y) + (-3 + 6y) = -2 + 5 - y - 3 + 6y = 5y$

$D = 6 + (7a - 6) - (1 + 7a) - 1 = 6 + 7a - 6 - 1 - 7a - 1 = -2$

Exercice n°15 :

$A = (x^2 + 5x - 3) + (x^2 - x + 7) = x^2 + 5x - 3 + x^2 - x + 7 = 2x^2 + 4x + 4$

$B = (3x^2 - 4x - 3) - (x^2 - 2x + 1) = 3x^2 - 4x - 3 - x^2 + 2x - 1 = 2x^2 - 2x - 4$

$C = -(x^2 + 6x - 3) + (x^2 + 2x + 1) = -x^2 - 6x + 3 + x^2 + 2x + 1 = -4x + 4$

$D = -(x^2 - 3x + 1) - (x^2 + 5x - 3) = -x^2 + 3x - 1 - x^2 - 5x + 3 = -2x^2 - 2x + 2$