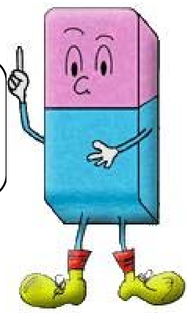
# SYNTHESE ( THEME 9 )

## FONCTIONS (2) : FONCTIONS AFFINES
## REPRESENTATIONS GRAPHIQUES



## A - FONCTION AFFINE

### A - 1 : DEFINITION ET NOTATION

**$a$ et $b$ étant deux nombres fixés, on appelle fonction affine tout processus opératoire qui au nombre $x$ associe le nombre $ax + b$ :**

$$\boldsymbol{x} \xrightarrow{\text{on multiplie par } a} \boldsymbol{ax} \xrightarrow{\text{puis on ajoute } b} \boldsymbol{ax + b}$$

Une fonction affine nommée $f$ se note $f : x \mapsto ax + b$ ( On lit « la fonction $f$ qui à $x$ associe $ax$ + b)

*Exemples :* **1.** La fonction $f$ telle que : $x \mapsto 2x - 3$ est une fonction affine avec $a$ = **2** et $b$ = **- 3**

**2.** Soit $g$ la fonction telle que : $x \mapsto 3x - 2$

| $x$ | -2 | 12 | 16 |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | **- 8** | **34** | **46** |

$g(-2) = \mathbf{3 \times (-2) - 2 = -6 - 2 = -8}$

$g(12) = \mathbf{3 \times 12 - 2 = 36 - 2 = 34}$

$g(16) = \mathbf{3 \times 16 - 2 = 48 - 2 = 46}$

- 8 est l'image de – 2 par la fonction $g$ , on note $\boldsymbol{g(-2) = -8}$

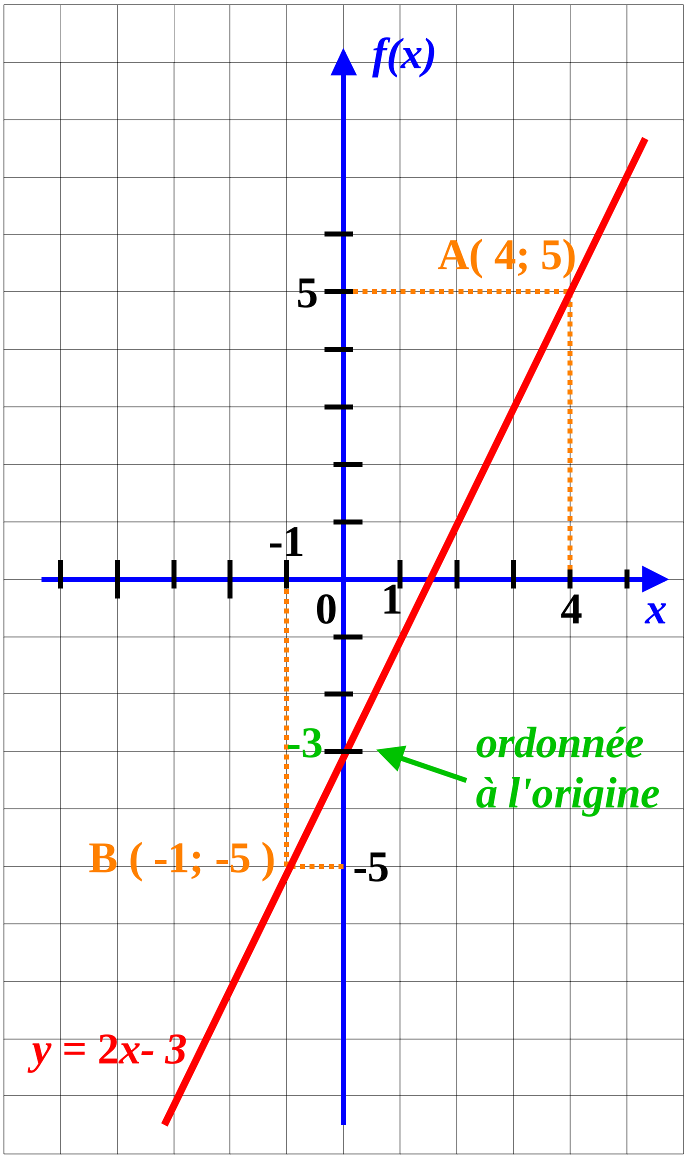
### A – 2 : CAS PARTICULIERS

**La fonction linéaire** définie par $f(x) = ax$ est une fonction affine avec $b$ = **0**

**La fonction constante** définie par $f(x) = b$ est une fonction affine avec $a$ = **0**

## A- 3 : REPRESENTATION GRAPHIQUE

**La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui passe par l'ordonnée à l'origine.**




***Exemple :***
**La représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto 2x - 3$ est la droite *D* passant par le point A ( 4 ; 5 ) et le point B ( -1 ; - 5)**

**En effet $f(4) = 2 \times 4 - 3 = 5$**

**et $f(-1) = 2 \times (-1) - 3 = -5$**

**La droite *D* a alors pour équation**

**y = 2x - 3**

**On dit que 2 est le coefficient directeur et que $f(0) = -3$ est son ordonnée à l'origine.**

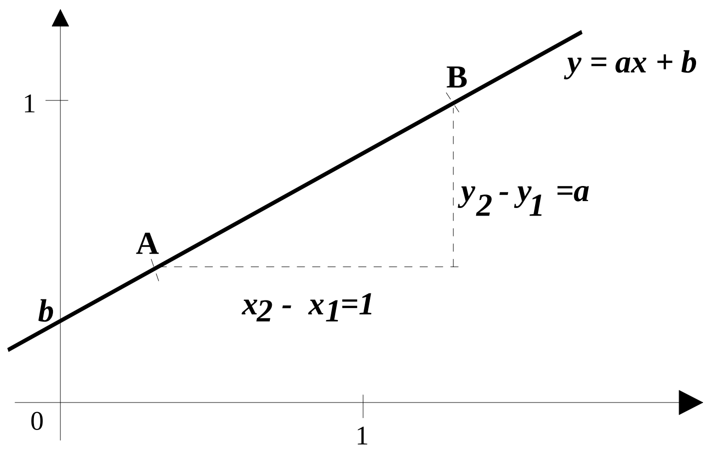
**Remarque :** **La représentation graphique d'une fonction constante est une droite qui est parallèle à l'axe des abscisses.**

## B- PROPORTIONNALITE DES ACCROISSEMENT

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.
Si $x_1$ et $x_2$ sont deux nombres distincts, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \qquad (x_2 \neq x_1)$$

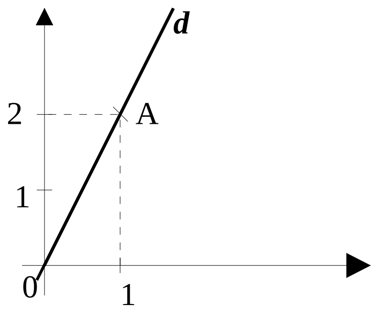
***Remarque :***
Si $x_2 - x_1 = 1$, alors $f(x_2) - f(x_1) = a$



# C - INTERPRETER UNE REPRESENTATION GRAPHIQUE

## C - 1 : Fonction linéaire

Sur la figure ci-contre, la droite $d$ qui passe par l'origine du repère est la représentation graphique d'une fonction $f$.



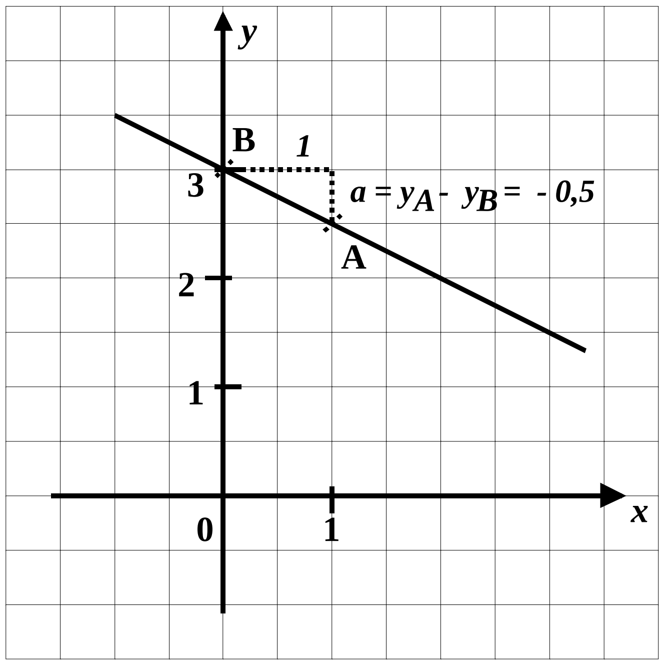

On veut déterminer le coefficient $a$ de cette fonction.

Le coefficient directeur $a$ est **l'ordonnée du point** A d'abscisse 1.

On lit : $a$ = **2** ;

$f$ est la fonction $x \mapsto 2x$

## C - 2 : Fonction affine




Sur la figure ci-contre, la droite $d$ est la représentation graphique d'une fonction affine $f$. Le repère est orthonormé.

On veut déterminer les coefficients $a$ et $b$ de cette fonction ( $f(x) = ax + b$ ).

$b$ est l'ordonnée du point d'intersection de $d$ avec l'axe des abscisses, donc : $b$ = ***f ( 0 ) = 3.***

Coefficient $a$ :

Si $x_A - x_B = 1$, alors $f(x_A) - f(x_B) = a$ .

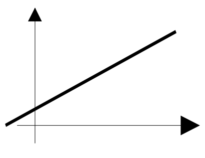
C'est-à-dire $y_A - y_B = a$

Sur le graphique, on lit $a$ = **- 0,5**

Conclusion : $f(x) = -0{,}5x + 3$

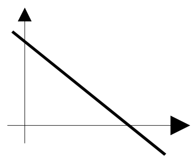
# D - FONCTION CROISSANTE - FONCTION DECROISSANTE

***a > 0***



**Fonction croissante**

***a < 0***



**Fonction décroissante**

## E - EXEMPLE de PROBLEME : « Épreuve commune de Mathématiques (Février 2006) »

**Problème (Questions enchaînées)**

### Enoncé

Un viticulteur propose un de ses vins aux tarifs suivants :

- Tarif 1 : 7,5 euros la bouteille, transport compris.
- Tarif 2 : 6 euros la bouteille, mais avec un forfait de transport de 18 euros.

1. **Recopier et compléter** le tableau donné ci-dessous en justifiant **particulièrement** les calculs de la colonne grisée.

| Nombre de bouteilles | 1 | 5 | | | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| Prix au tarif 1 en € | 7,5 | | | 97,5 | |
| Prix au tarif 2 en € | | 48 | 78 | | |

2. Exprimer le prix à payer par le consommateur en fonction du nombre *x* de bouteilles achetées.

   Pour le tarif 1, le prix sera noté $P_1$ ; pour le tarif 2, le prix sera noté $P_2$ .

3. Tracer, sur une feuille de papier millimétré, les droite *d* et *d'* ,représentations graphiques des fonctions f et g définies par :
   $f(x) = 7{,}5x$ et $g(x) = 6x + 18$ pour des valeurs comprises entre 0 et 15.

   On placera l'origine dans le coin inférieur gauche de la feuille et on prendra les unités suivantes :

   - sur l'axe des abscisses : 1cm représente 1 bouteille.
   - Sur l'axe des ordonnées : 1cm représente 10 euros.

Pour les questions 4 et 5, on laissera sur le graphique les traits de rappel utilisés pour faciliter la lecture.

4. Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique :
   a. On veut acheter 6 bouteilles. Quel est le tarif le plus avantageux ?
   b. On dispose de 70 euros. Lequel des deux tarifs permet d'acheter le plus grand nombre de bouteilles ?
      Préciser ce nombre de bouteilles.
   c. Déterminer graphiquement pour combien de bouteilles le prix de revient est identique, quel que soit le tarif choisi. Donner ce nombre de bouteilles.
      Quel est le prix correspondant ?
5. Vérifier ces deux derniers résultats à l'aide d'une équation.

### Solution :

**1. Tableau**

| Nombre de bouteilles | **1** | **5** | **10** | **13** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|
| Prix au tarif 1 en € | **7,5** | **37,5** | **75** | **97,5** | **112,5** |
| Prix au tarif 2 en € | **24** | **48** | **78** | **96** | **108** |

**Calculs de la colonne grisée** :

- Avec un prix de 78 € avec le tarif 2, on a : ( 78 – 18 ) : 6 = 60 : 6 = 10, c'est-à-dire **10 bouteilles**
- Le prix payé pour 10 bouteilles avec le tarif 1 est : $7{,}5 \times 10 = 75$ soit **75 €**

## 2. Expression du prix payé par le consommateur en fonction du nombre de bouteilles achetées

Pour le tarif 1, expression du prix $P_1$ **en fonction de $x$** : $\boxed{P_1 = 7{,}5 \times x}$

Prix d'une bouteille Nombre de bouteilles

Pour le tarif 2, expression du prix $P_2$ **en fonction de $x$** : $\boxed{P_2 = 6 \times x + 18}$

forfait du transport

Prix d'une bouteille Nombre de bouteilles

## 3. Représentation graphique des fonction $f$ et $g$.

- $f(x) = 7{,}5x$

$f$ est une **fonction linéaire** de la forme $f(x) = ax$ avec $a = 7{,}5$

Sa représentation graphique est donc une droite $d$ qui passe par l'origine du repère et le point de coordonnées ( 10 ; 75 ). En effet $f(10) = 7{,}5 \times 10 = 75$.

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 75 |

- $g(x) = 6x + 18$

$g$ est une **fonction affine** de la forme $g(x) = ax + b$ avec $a = 6$ et $b = 18$

Sa représentation graphique est donc une droite $d'$ qui passe par les points de coordonnées (0 ; 18) et (15 ; 108).

En effet $g(0) = 6 \times 0 + 18 = 18$ et $g(15) = 15 \times 6 + 18 = 108$

| $x$ | 0 | 15 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 18 | 108 |

## 4. a. Lecture graphique du prix le plus avantageux pour 6 bouteilles

Pour 6 bouteilles, la droite $d$ est en dessous de la droite $d'$ .**Le tarif 1 est donc le plus avantageux.**

En effet, avec le tarif 1, 6 bouteilles coûtent 45 € ( $P_1$ ) alors que pour le tarif 2, elles coûtent 54 € ($P_2$ ).

### b. Lecture graphique du nombre de bouteilles avec 70 €

Avec la même ordonnée 70, l'abscisse du point de la droite $d$ **est supérieure** à l'abscisse du point de la droite $d'$ . Donc pour avec 70 € **le tarif 1 est le plus avantageux.**

### c. Lecture graphique du nombre de bouteilles losque les deux tarifs sont égaux.

Les deux tarifs sont égaux lorsque les **deux droites se coupent**.

Le point d'intersection des droites *d* et *d'* a pour coordonnées ( 12 ; 90 )

Le nombre de bouteilles est 12.

Le prix commun est 90 €

## 5. Vérification par le calcul des deux derniers résultats.

Si le prix à payer est le même, alors on a l'égalité :

$$7{,}5\,x = 6\,x + 18$$

$$7{,}5\,x - 6\,x = 18$$

$$1{,}5\,x = 18$$

$$x = 18 : 1{,}5$$

$$\boxed{x = 12}$$

**Donc pour 12 bouteilles, le prix à payer est le même pour les deux tarifs, soit : 12 × 7,5 = 90 €**