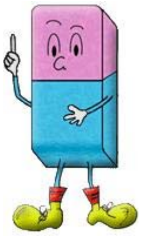

3- EME

Thème N°5 : RACINES CARREES (2)
CALCULS NUMERIQUES (2) : PUISSANCES

A - PUISSANCES D'UN NOMBRE RELATIF

A - 1 Puissance d'exposant entier positif

Définition :

Si n est un entier supérieur ou égal à 2, alors : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots\dots\dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

De plus , $a^1 = a$ et pour $a \neq 0$, $a^0 = 1$

Exemples :

$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$; $(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6) = -216$

$3^9 = 19\ 683$ $(-3)^0 = 1$ $(5{,}7)^1 = 5{,}7$

A – 2 Puissance d'exposant entier négatif

Définition :

Si $a \neq 0$, alors le nombre a^{-n} est l'inverse de a^n. C'est-à-dire : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemples :

$4^{-1} = \dfrac{1}{4^1} = 0{,}25$; $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$; $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = 0{,}125$

A – 3 Puissances de dix

1°) Cas ou l'exposant est positif

Pour tout entier positif n, l'écriture décimale de 10^n est un 1 suivi de n zéros

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \dots\dots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = \mathbf{10^n}$

Exemples : $1\ 000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^{\mathbf{3}}$; $1 = 10^{\mathbf{0}}$

2°) Cas ou l'exposant est négatif

Pour tout entier positif n, $\boxed{10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}} = \dfrac{1}{10\dots\dots0} = 0,\ 000 \dots 01$ (n zéros précédent le 1 , sans oublier la virgule)

Exemple : $10^{-3} = \ = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000} = \mathbf{0{,}001}$

A – 4 Ecriture scientifique d'un nombre décimal

Nombre décimal non nul pouvant s'écrire sous la forme $a \times 10^n$, avec a un nombre décimal non nul ne comportant qu'un seul chiffre non nul avant la virgule et n un entier relatif.

Exemple : 835 000 = **8,35 × 100 000 = 8,35 × 10 ^{5}**

0,000 056 = **5,6 × 0,000 01 = 5,6 × 10 $^{-5}$**

A – 5 Règles de calculs

Si $a \neq 0$ et si m et n sont des entiers relatifs, alors :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad et \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad ; \quad (a^n)^P = a^{n \times p}$$

Exemples :

$3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$; $9^5 \times 9^{-3} = 9^{5+(-3)} = 9^2$; $2^{-6} \times 2^5 = 2^{-6+5} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$(-4)^{-2} \times (-4)^5 = (-4)^{-2+5} = (-4)^3$; $\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2$; $\frac{2^{12}}{2^{15}} = 2^{12-15} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$(5^2)^3 = 5^{2\times3} = 5^6$; $\left((-8)^4\right)^7 = (-8)^{4\times7} = (-8)^{28}$; $(7^{-5})^2 = 7^{-5\times2} = 7^{-10}$

Si a et b sont des nombres différents de 0 et si n est un entier relatif, alors :

$$(ab)^n = a^n b^n \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemples :

$(2\times3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 4\times9 = 36$; $(5\times10^{-3})^2 = 5^2 \times (10^{-3})^2 = 25\times10^{-6}$

$(5x)^2 = 5^2 \times x^2 = 25x^2$; $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times \sqrt{5}^2 = 4\times5 = 20$; $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

A – 6 *Organiser un calcul avec des puissances*

Donne les écritures décimale et scientifique du nombre suivant : $A = \dfrac{7 \times 10^{7} \times 25 \times 10^{-5}}{14 \times 10^{8} \times 10^{-2}}$.

On rassemble les nombres et les puissances de dix $\quad A = \dfrac{7\times 25}{14}\times\dfrac{10^{7}\times 10^{-5}}{10^{8}\times 10^{-2}}$

On simplifie les nombres et les puissances de dix $\quad A = \dfrac{7\times 25}{2\times 7}\times\dfrac{10^{7+(-5)}}{10^{8+(-2)}}$

$A = \dfrac{25}{2}\times\dfrac{10^{2}}{10^{6}}$

$A = 12{,}5\times 10^{2-6}$

$A = 12{,}5\times 10^{-4}$

L'écriture scientifique est $\quad A = 1{,}25\times 10^{1}\times 10^{-4}$

$A = 1{,}25\times 10^{1+(-4)}$

$\boxed{A = 1{,}25 \times 10^{-3}}$

L'écriture décimale est $\quad A = 1{,}25\times 0{,}001$

$\boxed{A = 0{,}00125}$

B – PROPRIETES SUR LES RACINES CARREES

B – 1 Produit de deux racines carrées

Si *a* et *b* sont deux nombres positifs, alors on a : $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$

Exemples : $\sqrt{7}\times\sqrt{3} = \sqrt{7\times 3} = \sqrt{21}$ $\qquad \sqrt{18}\times\sqrt{2} = \sqrt{18\times 2} = \sqrt{36} = 6$

ATTENTION : $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ *et* $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Méthode pour calculer une somme de nombres écrits avec des radicaux.

Calculer l'expression $A = \sqrt{45} + 3\sqrt{20} - 11\sqrt{5}$ **en donnant le résultat sous la forme** $a\sqrt{b}$**, où *a* est un entier relatif et *b* un entier positif le plus petit possible.**

On remarque que : 45 = **9** × 5 et 20 = **4** × 5

On écrit donc $\sqrt{45}$ **et** $\sqrt{20}$ **en fonction de** $\sqrt{5}$ $\quad A = \sqrt{9\times 5} + 3\sqrt{4\times 5} - 11\sqrt{5}$

$A = \sqrt{9}\times\sqrt{5} + 3\times\sqrt{4}\times\sqrt{5} - 11\times\sqrt{5}$

$A = 3\times\sqrt{5} + 3\times 2\times\sqrt{5} - 11\times\sqrt{5}$

$A = 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 11\sqrt{5}$

On factorise par $\sqrt{5}$ $\quad A = (3+6-11)\times\sqrt{5}$

On écrit le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ $\quad \boxed{A = -2\sqrt{5} \qquad (\ a = -2 \ \text{ et } \ b = 5\ )}$

B – 2 Quotient de deux racines carrées

Si a et b sont deux nombres positifs, b différent de 0, alors on a : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

<u>Exemples :</u> $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{42}{7}} = \sqrt{6}$ $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4$

<u>Méthode</u> pour calculer avec des quotients de racines carrées.

Soit l'expression $B = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{6}}$**. Simplifier et écrire** B **sans radical au dénominateur**

L'expression est un quotient de deux nombres écrits avec des radicaux,

On réécrit B **comme le radical d'un quotient.** $B = \sqrt{\frac{75}{6}}$

On simplifie la fraction par 3. $B = \sqrt{\frac{25}{2}}$

On écrit B **comme le quotient de deux nombres écrits avec des radicaux** $B = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}}$

On remarque que $\sqrt{25} = 5$ $B = \frac{5}{\sqrt{2}}$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$ **car** $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ $B = \frac{5\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$

On donne le résultat sans radical au dénominateur $\boxed{B = \frac{5\sqrt{2}}{2}}$