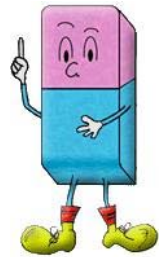


THEME 11 : PROBABILITES



A- VOCABULAIRE des probabilités

Expérience aléatoire :

Une expérience dont on connaît tous les résultats possibles sans savoir avant l'expérience le résultat qu'on obtiendra est appelée expérience aléatoire.

Issue :

Lors d'une expérience aléatoire, chaque résultat obtenu est aussi appelé issue.

Événement :

Un événement est constitué d'une ou de plusieurs issues.

Probabilité :

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée probabilité.
La probabilité d'un événement A se note $p(A)$

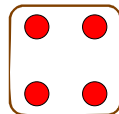
Exemple : « le dé cubique »

- ▶ **Expérience :** On lance un dé cubique et on repère le numéro obtenu.
- ▶ Cette expérience admet **6 issues** : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
- ▶ Chaque issue ne dépend pas des issues précédentes, cette expérience est donc **aléatoire**.

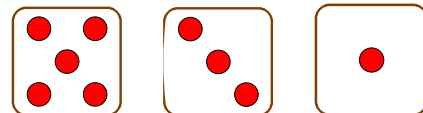


- ▶ On considère : **l'évènement A** : « on a obtenu un quatre »
l'évènement B : « on a obtenu un nombre impair »

L'évènement A est constitué de la seule issue « 4 »



L'évènement B est constitué de trois issues « 1 », « 3 » et « 5 ».



- ▶ On a 1 chance sur 6 d'obtenir le chiffre « 4 ». La **probabilité de l'évènement A** est donc $p(A) = \frac{1}{6}$.

Sur 6 chiffres, il y a 3 chiffres impairs. Il y a donc 3 chances sur 6 d'obtenir « un nombre impair ».

La probabilité de l'évènement B est donc $p(B) = \frac{3}{6}$ ou encore $p(B) = \frac{1}{2}$

B- PROPRIETES des probabilités

- ▶ La probabilité p d'un événement est comprise entre 0 et 1.
- ▶ La probabilité d'un événement qui se produit à coup sûr est égale à 1 : L'événement est dit certain.
- ▶ La probabilité d'un événement qui ne peut se produire est égale à 0 : L'événement est dit impossible.
- ▶ La somme des probabilités associées à chaque issue est égale à 1.

Exemple : « le dé cubique »

▶ On a $\frac{1}{2} = 0,5$, donc $0 \leq p(A) \leq 1$

On a $\frac{1}{6} \approx 0,166\dots$, donc $0 \leq p(B) \leq 1$

▶ On considère l'évènement C : « on a obtenu un nombre entre 0 inclus et 6 inclus »

On a $p(C) = \frac{6}{6}$, soit encore $p(C) = 1$. L'évènement C est donc certain.

▶ On a aussi : $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$ La somme est donc égale à 1

▶ On considère l'évènement D : « on a obtenu le nombre 7 »

On a $p(D) = \frac{0}{6}$, soit encore $p(D) = 0$. L'évènement D est donc impossible.

C- Evénements INCOMPATIBLES - Evénements CONTRAIRES

Evénements incompatibles :

Définition : Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent se produire en même temps.

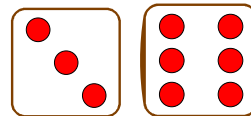
Propriété : Si deux événements A et B sont incompatibles, alors $p(A \text{ ou } B \text{ est réalisé}) = p(A) + p(B)$

Exemple : « le dé cubique »

▶ On considère l'évènement E : « on a obtenu un multiple de 3 »

L'évènement E est constitué de 2 issues :

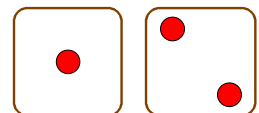
On a $p(E) = \frac{2}{6}$.



On considère l'évènement F : « on a obtenu un nombre strictement inférieur à 3 »

L'évènement F est constitué de 2 issues :

On a $p(F) = \frac{2}{6}$.

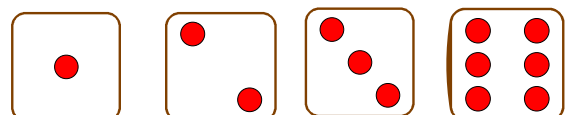


Comme les événements E et F n'ont pas d'issue commune, alors E et F sont incompatibles.

▶ La probabilité d'avoir un nombre multiple de 3 **ou** un nom strictement inférieur à 3 est :

$$p(E) + p(F) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

C'est-à-dire $p(E \text{ ou } F) = \frac{4}{6}$. On a 4 issues



Événements contraires :

Définition : L'événement contraire d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

On le note $p(\text{non } A)$ ou $p(\bar{A})$.

Propriété : La somme des probabilités de A et de son contraire est 1 :
 $p(A) + p(\text{non } A) = 1$

Exemple : « le dé cubique »

► Reprenons **l'évènement A** : « on a obtenu un quatre » avec $p(A) = \frac{1}{6}$

L'évènement « non A » est constitué de 5 issues :



Comme les événements A et non A sont incompatibles, alors :

$$p(\text{non } A) + p(A) = 1$$

$$\text{Ainsi : } p(\bar{A}) = p(\text{non } A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

D- Arbre des possibles

L'arbre des possibles d'une expérience indique chacune de ses issues.

Quand on fait figurer sur chaque branche la probabilité associée, on dit qu'on pondère l'arbre des possibles.

Exemple : « des billes de différentes couleurs »

Un sachet contient 3 billes vertes, 1 bille bleue et 6 billes oranges. On tire, au hasard, une bille du sachet et on définit les événements suivants :

A : « la bille est verte » ;

B : « la bille est bleue » ;

C : « la bille est orange ».



Calcul de probabilités.

Comme la bille est tirée au hasard, alors chaque bille a la même chance d'être tirée.

Le nombre d'issues possibles est de 10 (3 + 1 + 6 = 10).

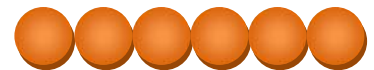
L'évènement A est constitué de 3 issues favorables, on a donc : $p(A) = \frac{3}{10}$.



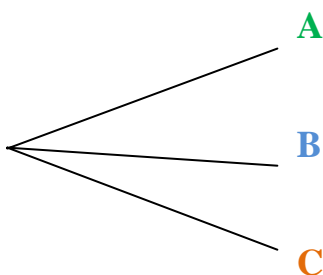
L'évènement B est constitué de 1 issue favorable, on a donc : $p(B) = \frac{1}{10}$.



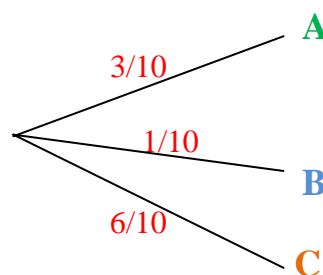
L'évènement C est constitué de 6 issues favorables, on a donc : $p(C) = \frac{6}{10}$.



Arbre des possibles :



Arbre pondérée des possibles :



$$\text{On vérifie que } \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{6}{10} = 1$$

E- Expérience à deux épreuves

Sur l'arbre des possibles d'une expérience aléatoire à deux épreuves, une succession de deux branches est appelé un chemin.

Avec un arbre, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est égal au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.



Exemple :

Une urne opaque contient trois boules rouges (B), deux boules vertes (V).

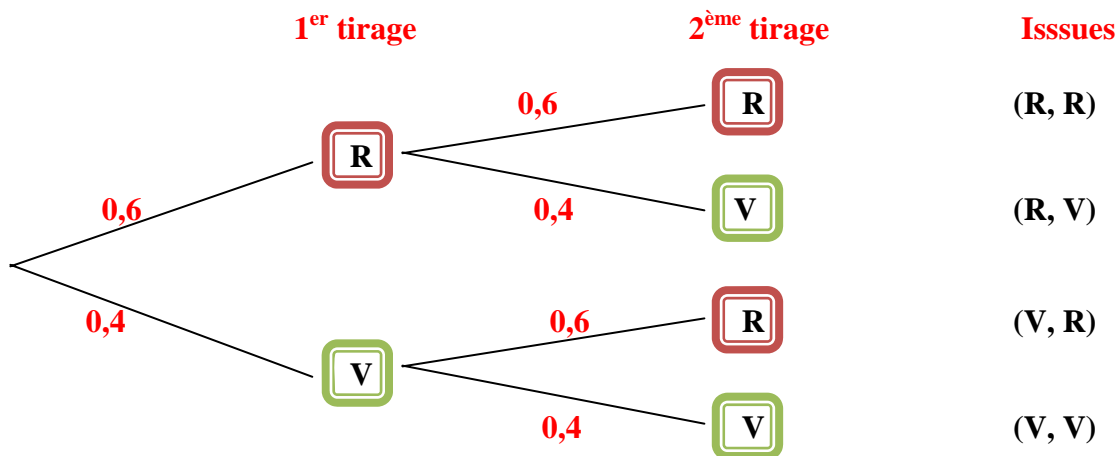
On tire une boule au hasard, on la remet dans l'urne, puis on tire une deuxième boule au hasard.

1. Dessine l'arbre pondéré des possibles par les probabilités sous forme décimale.
2. Calcule la probabilité de tirer deux boules rouges.
3. Calcule la probabilité de tirer deux boules de même couleur.



Solution :

1. L'arbre pondéré des possibles.



2. Probabilité de tirer deux boules rouges

Il s'agit de calculer la probabilité dont l'issue est (R, R)

On a : $0,6 \times 0,6 = 0,36$.

Conclusion : La probabilité de tirer deux boules rouges est 0,36.

3. Probabilité de tirer deux boules de même couleur

Il s'agit de calculer la probabilité dont les issues sont (R, R) et (V, V).

Comme ces deux issues sont incompatibles, pour calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur, on ajoute les probabilités de ces issues.

On a : $0,6 \times 0,6 + 0,4 \times 0,4 = 0,36 + 0,16 = 0,52$.

Conclusion : La probabilité de tirer deux boules de même couleur est 0,52.