



NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS / ARITHMETIQUE

A – RAPPELS SUR LES ECRITURES FRACTIONNAIRES

A – 1 QUOTIENTS EGAUX

Si a , b et k sont non nuls : $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$.

On peut simplifier l'écriture d'un quotient. *Exemple :* $\frac{15}{12} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{5}{4}$

Critères de divisibilité : comment reconnaître si un nombre entier est divisible par un autre ?

- Examine le dernier chiffre du nombre :
Si c'est un nombre pair (0 , 2 , 4 , 6 , 8), le nombre est divisible par 2.
Si c'est 0 ou 5, le nombre est divisible par 5.
Si c'est 0, le nombre est divisible par 10.
- Additionne tous les chiffres qui ont permis d'écrire le nombre :
Si la somme trouvée est divisible par 3, le nombre en question est aussi divisible par 3.
Si la somme trouvée est divisible par 9, le nombre en question est aussi divisible par 9.

A – 2) ADDITION , SOUSTRACTION , MULTIPLICATION , DIVISION

a , b , c et d désignent des nombres positifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad ; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \quad ; \quad a \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b} \quad ; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemples :

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad ; \quad 6 + \frac{1}{2} = \frac{12}{2} + \frac{1}{2} = \frac{12+1}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\frac{17}{9} - \frac{2}{9} = \frac{17-2}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5 \times 3}{3 \times 3} = \frac{5}{3} \quad ; \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$$

$$\frac{2}{7} \times \frac{21}{4} = \frac{2 \times 21}{7 \times 4} = \frac{2 \times 3 \times 7}{7 \times 2 \times 2} = \frac{3}{2} \quad ; \quad 4 \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$$

Pour diviser une fraction par une autre fraction, on multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième fraction.

Pour b , c et d non nuls : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ ou $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemples :

$$\frac{4}{7} \div \frac{5}{8} = \frac{4}{7} \times \frac{8}{5} = \frac{4 \times 8}{7 \times 5} = \frac{32}{35}$$

$$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{27}} = \frac{2}{9} \div \frac{2}{27} = \frac{2}{9} \times \frac{27}{2} = \frac{2 \times 9 \times 3}{9 \times 2} = 3$$

B – MULTIPLE – DIVISEUR – NOMBRE PREMIER

B – 1 MULTIPLE – DIVISEUR

Un nombre b , non nul, est un **diviseur** d'un nombre a lorsqu'il existe un nombre entier k , tel que :

$$a = k \times b$$

On dit que a est un **multiple** de b

Exemples : 27 est un multiple de 9 car $27 = 9 \times 3$
6 est un diviseur de 42 car $42 : 6 = 7$

Comment trouver tous les diviseurs d'un même nombre :

Exemple : Liste des diviseurs de 56.

Pour dresser la liste des diviseurs, on peut dresser un tableau comme ci-dessous

1	2	4	7
56	28	14	8
$1 \times 56 = 56$	$2 \times 28 = 56$	$4 \times 14 = 56$	$7 \times 8 = 56$

Les diviseurs de 56 sont : 1 – 2 – 4 – 7 – 8 – 14 – 28 – 56

B – 2 NOMBRE PREMIER

Un nombre entier qui n'a pour diviseur que lui-même et le chiffre 1 s'appelle un **nombre premier**

Exemples :

- 83 est un nombre premier car les diviseurs sont : 83 (lui-même) et 1.
- 143 n'est pas un nombre premier car 143 , 11 , 13 et 1 sont des diviseurs de 143.

C – Le PGCD

Les diviseurs communs aux nombres a et b sont les nombres qui divisent à la fois a et b .
Le Plus Grand Commun Diviseur de deux nombres a et b est appelé **PGCD de a et b** .
On le note : **PGCD (a ; b)**

Exemple : PGCD des nombres 40 et 100.

• Les diviseurs de 40 sont : 1 – 2 – 4 – 5 – 8 – 10 – **20** – 40.
• Les diviseurs de 100 sont : 1 – 2 – 4 – 5 – 10 – **20** – 25 – 50 – 100

Les diviseurs communs à 40 et 100 sont : 1 – 2 – 4 – 5 – 10 – **20**

Le PGCD de 40 et 100 est **20**. On écrit **PGCD (40 ; 100) = 20**

D – NOMBRES PREMIERS ENTRE-EUX

Deux nombres entiers (non nuls) sont premiers entre eux si leur **PGCD est égal à 1**

Exemples :

• Les diviseurs de 45 sont : **1** – 3 – 5 – 9 – 15 – 45.

Les diviseurs de 14 sont : **1** – 2 – 7 – 14.

Comme **PGCD (45 ; 14) = 1** , **45 et 14 sont premiers entre eux.**

• 40 et 100 ne sont pas premiers entre eux car 45 et 100 sont des multiples de 10.
On a **PGCD (100 ; 40) = 20**

E – CALCULER UN PGCD

E – 1 ALGORITHME DES DIFFERENCES

Exemple : Recherche du PGCD de 2 940 et 735.

• PGCD (2 940 ; 735) = PGCD (2 205 ; 735)

$$2\,940 - 735$$

• PGCD (2 205 ; 735) = PGCD (1 470 ; 735)

$$2\,205 - 735$$

• PGCD (1 470 ; 735) = PGCD (735 ; 735)

$$1\,470 - 735$$

On remplace le grand des deux par leur différence

On recommence le procédé jusqu'à obtenir deux nombres égaux.

Conclusion : PGCD (2 940 ; 735) = 735

Ne pas oublier de conclure

E – 2 ALGORITHME D'EUCLIDE (Ou divisions successives)

Propriété : Si a et b sont deux nombres entiers non nuls tels que $a > b$, alors $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$, ou r est le reste de la **division Euclidienne** de a par b .

Dans l'algorithme d'Euclide, le PGCD est **le dernier reste non nul**

Exemple : Déterminer le PGCD de 1 053 et 325

- ① On effectue la division Euclidienne du plus grand des deux nombres par le plus petit.
- ② On renouvelle la première étape en considérant le reste et le diviseur de la division précédente et ainsi de suite jusqu'à obtenir un reste nul. ③

①

$$\begin{array}{r|l} 1\,053 & 325 \\ \hline & 78 \\ & 3 \end{array}$$

②

$$\begin{array}{r|l} 325 & 78 \\ \hline & 13 \\ & 4 \end{array}$$

③

$$\begin{array}{r|l} 78 & 13 \\ \hline & 0 \\ & 6 \end{array}$$

Conclusion : PGCD (1 053 ; 325) = 13

Ne pas oublier de conclure

F – FRACTION IRREDUCTIBLE

Définition : Une fraction $\frac{a}{b}$ est dite **irréductible** lorsque le PGCD (a ; b) = est égal à

1.

Propriété : Pour rendre une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, on divise le numérateur a

Exemples :

- $\frac{45}{14}$ est une fraction irréductible car PGCD (45 ; 14) = 1 (voir le paragraphe D.)
- On sait que PGCD (1 053 ; 325) = 13 (voir le paragraphe E-2.)

Donc $\frac{1053}{325} = \frac{1053 : 13}{325 : 13} = \frac{81}{25}$

La forme irréductible de la fraction $\frac{1053}{325}$ est $\frac{81}{25}$

G – LES NOMBRES

Les nombres	description	notation	Exemples
Entiers naturels	Tous les nombres entiers positifs	N	0 ; 18 ; $\sqrt{36}$; 2006
Entiers relatifs	Tous les nombres entiers positifs et négatifs	Z	-5 ; -3 ; 8 ; -2005
Décimaux	Tous les nombres qui ont une écriture décimale avec un nombre fini de chiffres après la virgule	D	17,9 ; $\frac{41}{100}$; -0,03 ; $-\frac{3}{5}$
Rationnels	Tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers relatifs	Q	$\frac{1}{3}$; $-\frac{19}{7}$; $\frac{14}{6}$
Réels	Tous les nombres connus en classe de troisième	R	π ; $\sqrt{2}$; -8 ; $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$