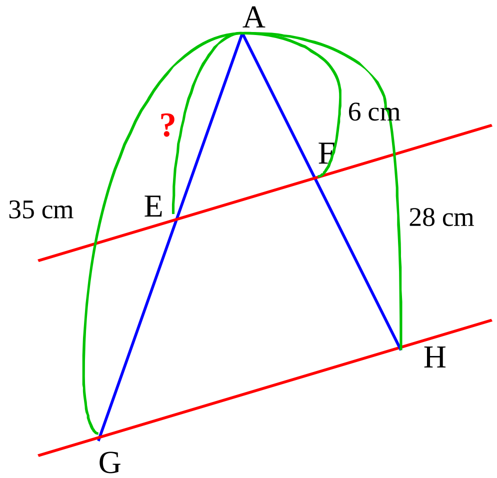
3- EME THEME N°8 :

THEOREME DE THALES (2)
Réciproque du théorème de Thalès

« Pour prendre un bon départ »



Exercice n°1 : Les droites (EF) et (GH) sont parallèles.
AG = 35 cm; AH = 28 cm ; AF = 6 cm.
Calcule la longueur AE.

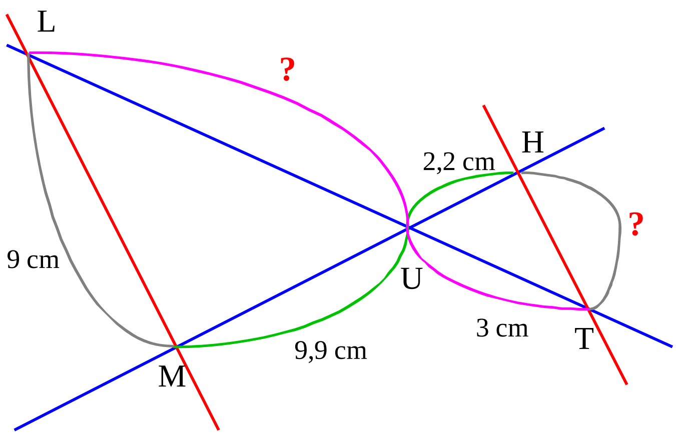
On sait que les droites (EG) et (FH) sont sécantes en A et (EF) parallèle à (GH).

D'après le théorème de Thales, on a : $\frac{AE}{AG} = \frac{AF}{AH} = \frac{EF}{GH}$.

Soit $\frac{AE}{35} = \frac{6}{28}$ d'où $AE = 35 \times \frac{6}{28} = \frac{210}{28} = 7{,}5$

Conclusion : AE = 7,5 cm

Exercice n°2 : Deux droites sécantes en U sont coupées par deux droites parallèles comme sur la figure ci-contre. TU = 3 cm ; UH = 2,2 cm ; UM = 9,9 cm ; ML = 9 cm
Calcule UL et TH.



On sait que les droites (LT) et (MH) sont sécantes en U et les droites (LM) et (HT) sont parallèles.

D'après le théorème de Thales, on a :
$\frac{UH}{UM} = \frac{UT}{UL} = \frac{HT}{LM}$.

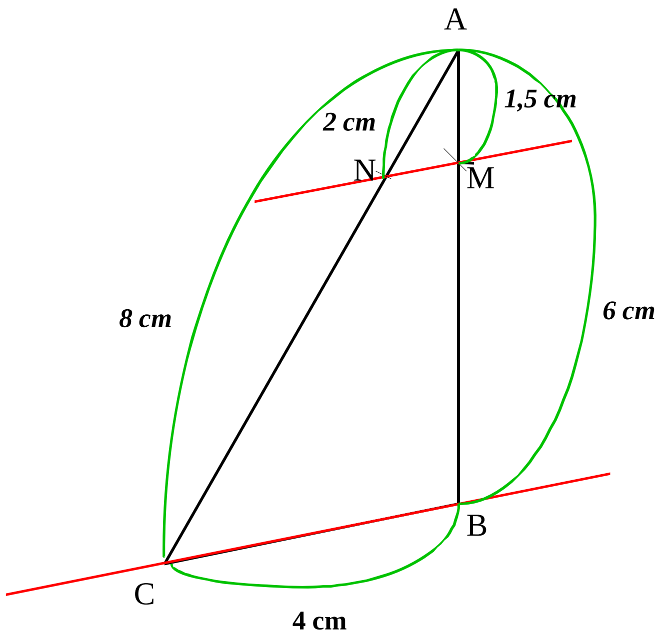
Calcul de UL : On a $\frac{UT}{UL} = \frac{UH}{UM}$ soit $\frac{3}{UL} = \frac{2{,}2}{9{,}9}$ d'où $UL = \frac{3 \times 9{,}9}{2{,}2} = \frac{29{,}7}{2{,}2} = 13{,}5$

Conclusion : UL = 13,5 cm

Calcul de HT : On a $\frac{HT}{ML} = \frac{UH}{UM}$ soit $\frac{HT}{9} = \frac{2{,}2}{9{,}9}$ d'où $HT = \frac{9 \times 9{,}9}{2{,}2} = \frac{19{,}78}{2{,}2} = 2$

Conclusion : HT = 2 cm

ACTIVITE : Construction du triangle ABC tel que AC = 8 cm ; AB = 6 cm et BC = 4 cm.
M est point de [AB] AM = 1,5 cm. N un point de [AC] que AN = 2 cm.



1°) Démontrons que les quotients $\frac{AM}{AB}$ *et* $\frac{AN}{AC}$ sont égaux.

$\frac{AM}{AB} = \frac{1{,}5}{6} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

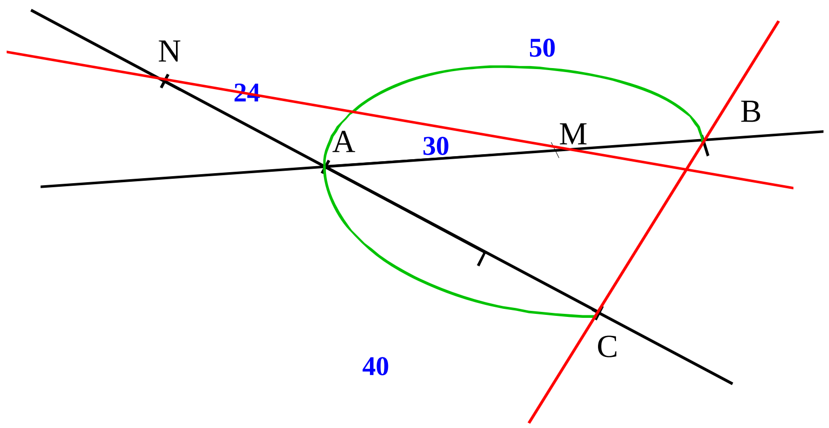
2°) En observant le dessin, comment semblent être les droites (MN) et (BC) ?

Les droites (MN) et (BC) semblent **parallèles**

3°) Enoncé la propriété vérifiée sur cet exemple.

Si $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

4°) Teste de l'énoncé



On a : $\frac{AN}{AC} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

Donc $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$

Or les droites (MN) et (BC) **ne sont pas parallèles.**

Donc il faut une **autre condition** pour que la propriété marche.

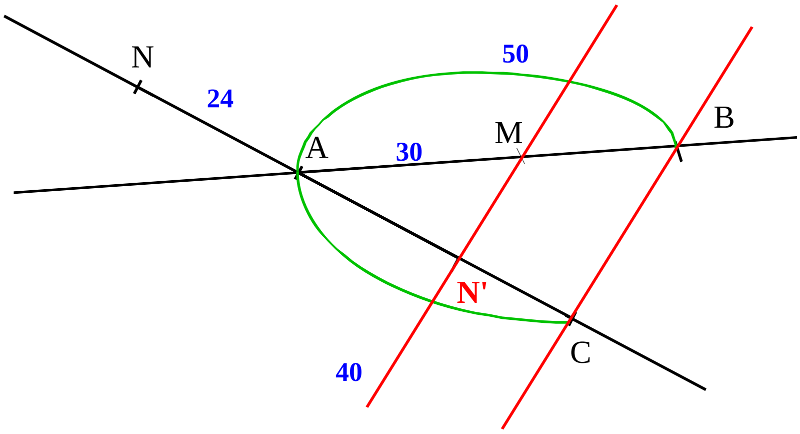
Les autres figures

	figure 1	figure 2	figure 3
$\frac{AM}{AB} =$	$\frac{30}{50} = 0{,}6$	$\frac{70}{50} = 1{,}4$	$\frac{25}{50} = 0{,}5$
$\frac{AN}{AC} =$	$\frac{24}{40} = 0{,}6$	$\frac{56}{40} = 1{,}4$	$\frac{20}{40} = 0{,}5$
Les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont-ils égaux ?	OUI	OUI	OUI
Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?	NON	NON	NON

5°) Construction du point N' symétrique du point N par rapport à A.

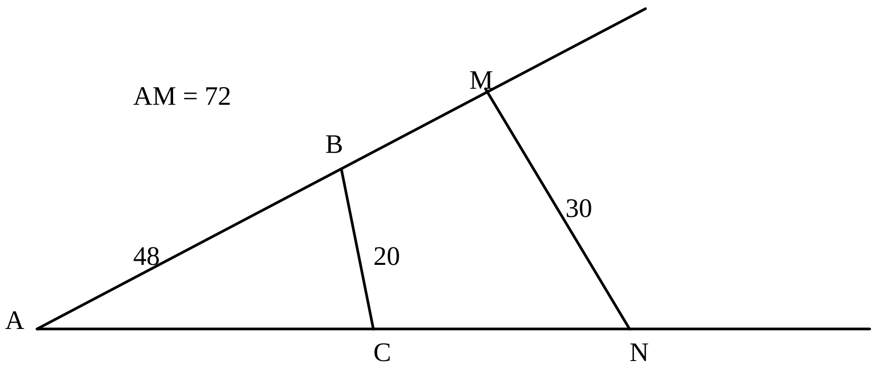
On constate que les droites (MN') et (BC) sont parallèles et les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN'}{AC}$ sont égaux.

Si $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont alignés dans le même ordre alors les droites alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles



Attention ! Il faut bien comparer les bons rapports !!

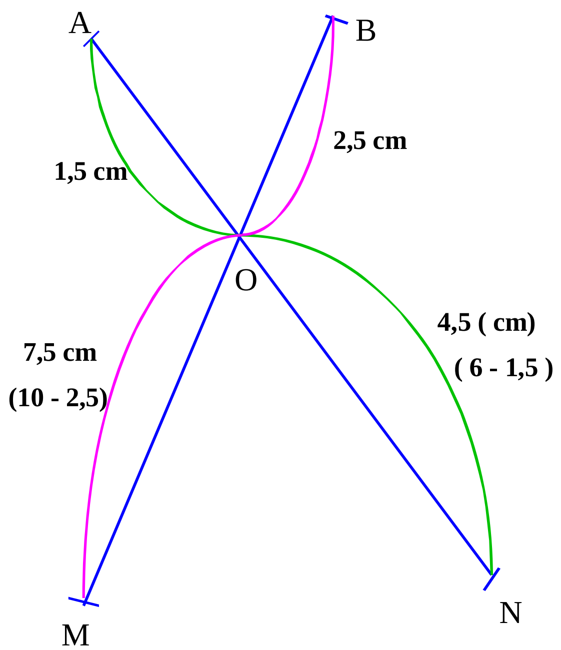
Observe cette figure: Est-ce que la position de M par rapport à A et B est bien la même que celle de N par rapport à A et C ? : **OUI**.



Calcule: $\frac{AM}{AB} = \frac{72}{48} = \frac{24\times 3}{24\times 2} = \frac{3}{2}$; $\frac{MN}{BC} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

Comparaison des rapports : on a $\frac{AM}{AB} \neq \frac{MN}{BC}$ Est-ce que (MN) // (BC) ? **NON**

Conclusion: Ne pas travailler avec les segments portés par les deux parallèles.



Exercice n°3 :

Le point O appartient aux segments [AN] et [BM].

Donc : ON = AN – OA = 6 – 1,5 = 4,5 (cm)

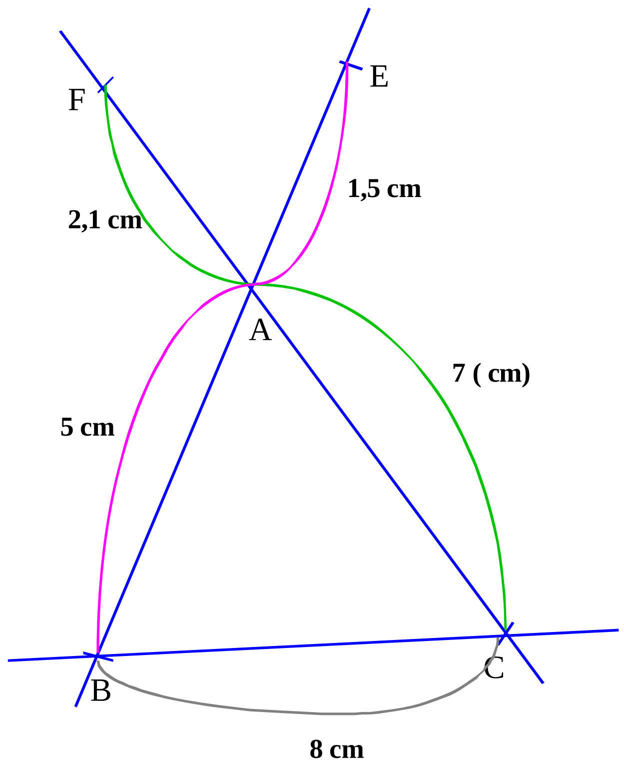
OM = MB – OB = 10 -2,5 = 7,5 (cm).

On a: $\frac{ON}{OA} = \frac{4,5}{1,5} = \frac{45}{15} = 3$ et $\frac{OM}{OB} = \frac{7,5}{2,5} = \frac{75}{25} = 3$

Les droites (AN) et (BM) sont sécantes en O, les points A, O, N et les points B, O, M sont alignés dans cet ordre, et on a : $\frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB} = 3$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (Ab) et (MN) sont parallèles.

Exercice n°4 :



1. On a : $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{2{,}1}{7} = 0{,}3$ et $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1{,}5}{5} = 0{,}3$

Les droites (EB) et (FC) sont sécantes en A, les points F, A, C et les points E, A, B sont alignés dans le même ordre, et on a

$\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB} = 0{,}3$.

Donc, **d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AC) et (FE) sont parallèles.**

2. Calcul de EF

On sait que les droites (EB) et (FC) sont sécantes en A et les droites (BC) et (FE) sont parallèles d'après la question **1**.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AE}{AB}$.

Soit $\dfrac{2{,}1}{7} = \dfrac{EF}{8}$ et EF = $\dfrac{8 \times 2{,}1}{7} = 2{,}4$

Conclusion : EF = 2,4 cm

Exercice n°5 :

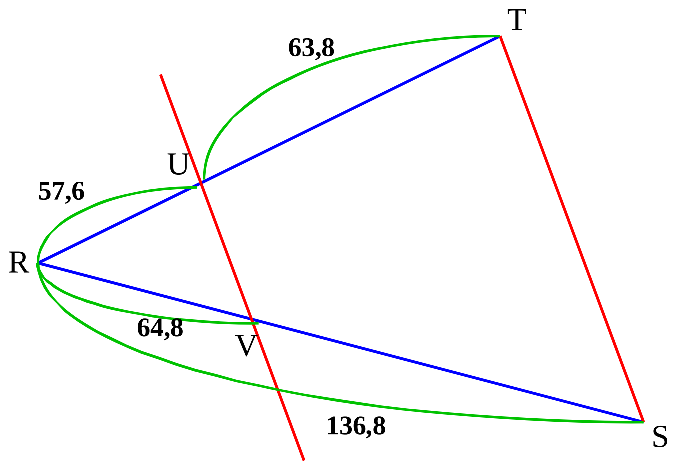


Figure 1 :

Le point U appartient au segment [RT],

donc RT = RU + UT = 57,6 + 63,8 = 121,4

On a : $\dfrac{RU}{RT} = \dfrac{57{,}6}{121{,}4} = \dfrac{576}{1214} = \dfrac{288}{607} = \dfrac{5472}{11533}$

$\dfrac{RV}{RS} = \dfrac{64{,}8}{136{,}8} = \dfrac{648}{1368} = \dfrac{9 \times 72}{19 \times 72} = \dfrac{9}{72} = \dfrac{5463}{11533}$

Les droites (UT) et (VS) se coupent en R

Si les droites (UV) et (TS) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, on aurait

$\dfrac{RU}{RT} = \dfrac{RV}{RS}$; *or* $\dfrac{5472}{11533} \neq \dfrac{5463}{11533}$

Conclusion : Les droites (UV) et (TS) ne sont pas parallèles

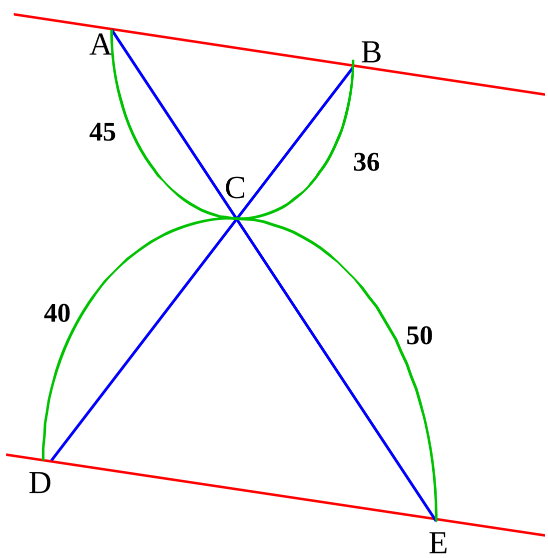


Figure 2 :

On a : $\dfrac{CB}{CD} = \dfrac{36}{40} = \dfrac{9}{10}$ *et* $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{45}{50} = \dfrac{9}{10}$

Les droites (AE) et (BD) se coupent en C ;

Les points A, C, E et les points B, C, D sont dans le même ordre ;

et on a : $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{9}{10}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

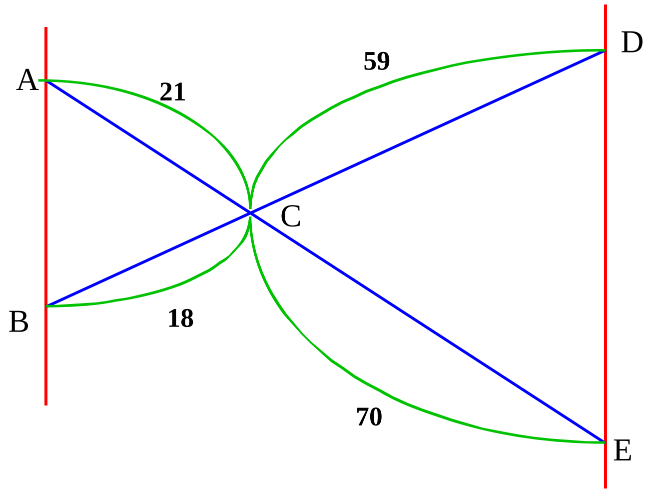


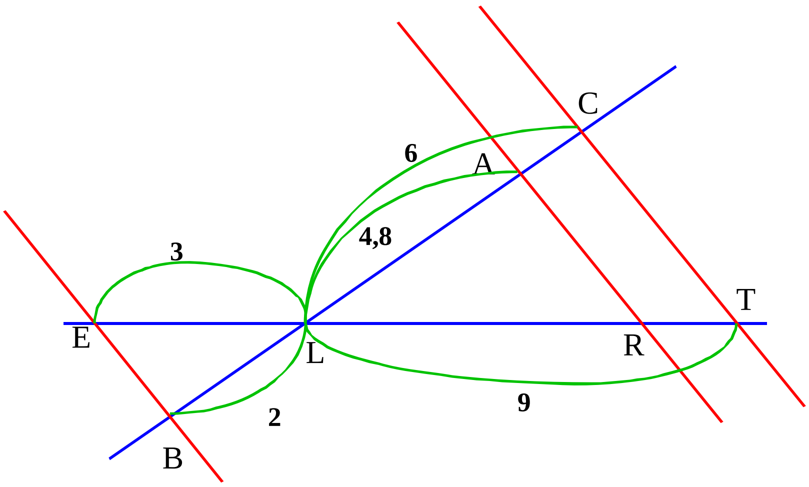
Figure 3 :

On a : $\dfrac{CB}{CD} = \dfrac{18}{59} = \dfrac{180}{590}$ et $\dfrac{CA}{CE} = \dfrac{21}{70} = \dfrac{3}{10} = \dfrac{177}{590}$

Les droites (EA) et (BD) se coupent en C
Si les droites (AB) et (DE) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, on aurait
$\dfrac{CB}{CD} = \dfrac{CA}{CE}$; or $\dfrac{180}{590} \neq \dfrac{177}{590}$

Conclusion : Les droites (AB) et (DE) ne sont pas parallèles

Exercice n°6



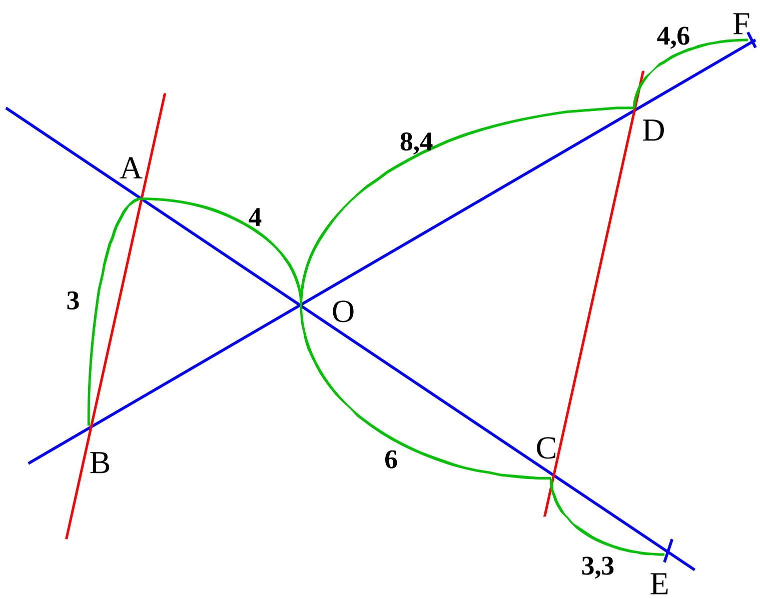
1. Calcul de LR

On sait que les droites (AC) et (RT) sont sécantes en L et les droites (AR) et (CT) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a :
$\dfrac{LA}{LC} = \dfrac{LR}{LT}$, soit $\dfrac{4{,}8}{6} = \dfrac{LR}{9}$ donc

$LR = 9 \times \dfrac{4{,}8}{6} = 7{,}2$

Conclusion : LR = 7,2 cm

2. On a : $\dfrac{LT}{LE} = \dfrac{9}{3} = 3$ et $\dfrac{LC}{LB} = \dfrac{6}{2} = 3$.
Les droites (CB) et (ET) sont sécantes en L, les points E, L, T et les points B, L, C sont alignés dans le même ordre et on a $\dfrac{LT}{LE} = \dfrac{LC}{LB} = 3$.
Donc, **d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EB) et (CT) sont parallèles.**



Exercice n°7

1. a. Calcul de OB

- Les droites (BD) et (AC) sont sécantes en O.
- (AB) et (DC) parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a :
$\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{DC}$.

Soit $\dfrac{4}{6} = \dfrac{OB}{8{,}4}$

Donc $OB = \dfrac{4 \times 8{,}4}{6} = 5{,}6$

Conclusion : **OB = 5,6 cm.**

b. Calcul de CD

D'après la question **1.a.** , on a : $\frac{4}{6} = \frac{3}{CD}$.

Donc $Cd = \frac{6 \times 3}{4} = 4{,}5$.

Conclusion : **CD = 4,5 cm.**

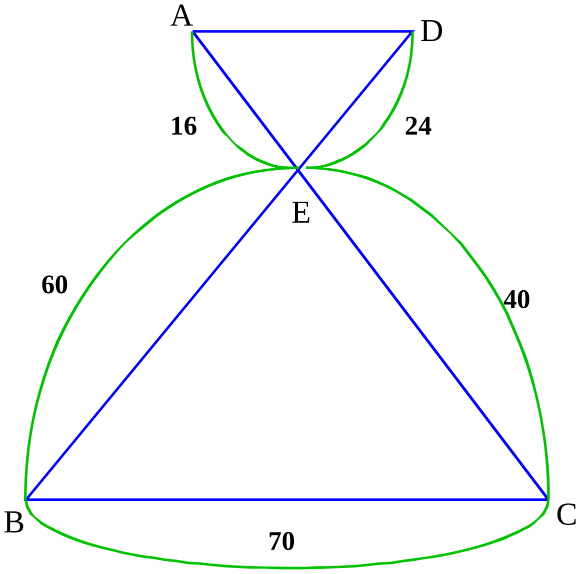
2. • Le point D appartient au segment [OF], donc OF = OD + DF = 8,4 + 4,6 = 13
Le point C appartient au segment [OE], donc OE = OC + CE = 6 + 3,3 = 9,3.

• On a : $\frac{OD}{OF} = \frac{8{,}4}{13} = \frac{8{,}4 \times 9{,}3}{13 \times 9{,}3} = \frac{78{,}12}{120{,}9}$ et $\frac{OC}{OE} = \frac{6}{9{,}3} = \frac{6 \times 13}{9{,}3 \times 13} = \frac{78}{120{,}9}$

Les droites (DF) et (CE) sont sécantes en O. Si les droites (DC) et (EF) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, on aurait $\frac{OD}{OF} = \frac{OC}{OE}$; or $\frac{8{,}4}{13} \neq \frac{6}{9{,}3}$

Conclusion : **Les droites (FE) et (DC) ne sont pas parallèles.**

Exercice n°8 :



1. On a : $\frac{EA}{EC} = \frac{16}{40} = \frac{4}{10}$ et $\frac{ED}{EB} = \frac{24}{60} = \frac{4}{10}$.

Les droites (DB) et (AC) sont sécantes en E, les points D, E, B et les points A, E, c sont alignés dans le même ordre et on a :
$\frac{EA}{AC} = \frac{ED}{EB} = \frac{4}{10}$.

Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (AD) et (BC) sont parallèles.**

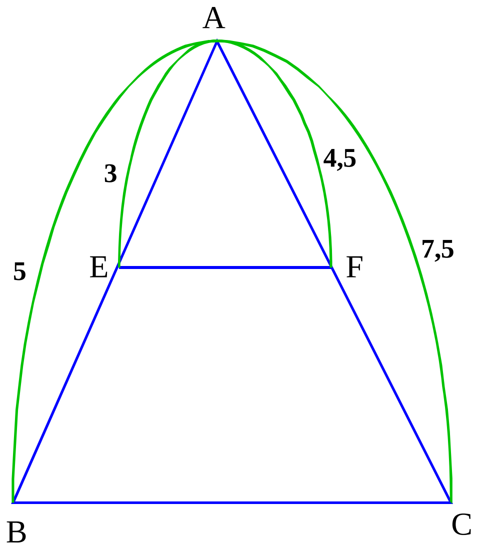
2. **Calcul de AD**

On sait que les droites (BD) et (AC) sont sécantes en E et les droites (DA) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BC} = \frac{ED}{EB}$.

Soit $\frac{16}{40} = \frac{AD}{70}$ donc $AD = 70 \times \frac{16}{40} = 28$.

Conclusion : **AD = 28 mm**



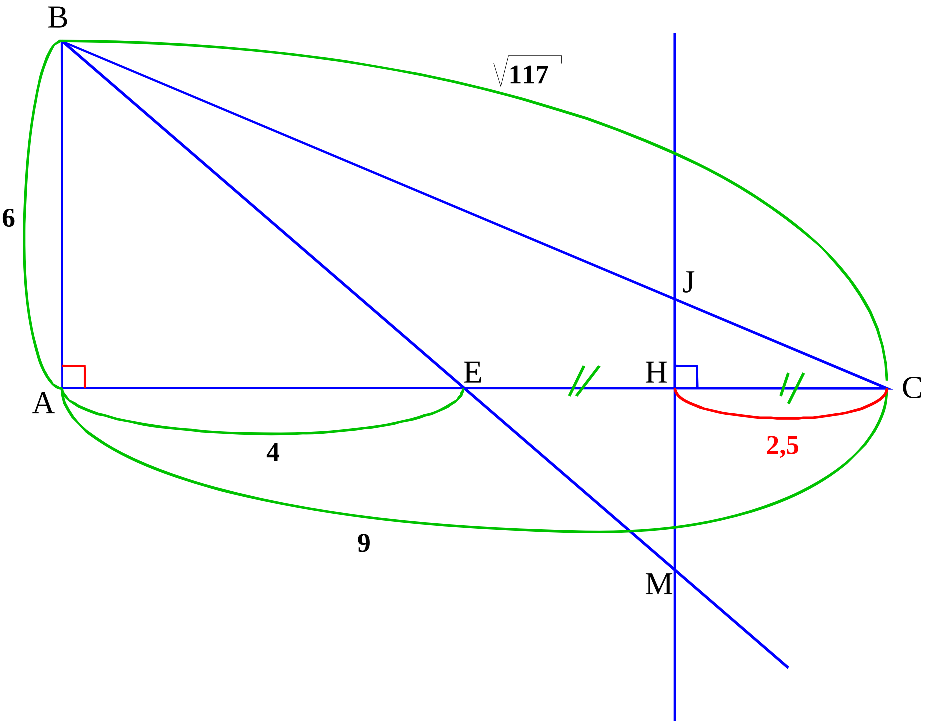
Exercice n°9 :

On a : $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{5}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{4{,}5}{7{,}5} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$.

On sait que les droites (BE) et (CF) sont sécantes en C et les points A, E, B et les points A, F, C sont alignés dans le même ordre.

Comme $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{3}{5}$, alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (EF) et (BC) sont parallèles** .

Exercice n°10 :



1. Nature du triangle ABC

On a : $BC^2 = \sqrt{117}^2 = 117$
et
$AB^2 + AC^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$
Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABC est rectangle en A**.

2. a) On sait que : (JH) est la médiatrice du segment [AC], donc (JH) perpendiculaire à (AC).
D'après la question **1.** on a (AB) perpendiculaire à (AC).
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sosnt parallèles entre-elles.
Conclusion : **(JH) et (AB) sont parallèles.**

On a CH = $\frac{1}{2}$ EC car (JH) est la médiatrice de [EC] et H est un point de [EC].
De plus, E est un point de [AC], donc EC = AC – AE = 9 – 4 = 5 (cm).
D'où CH = $\frac{1}{2}$ EC = $\frac{1}{2} \times 5$ = 2,5
Conclusion : **CH = 2,5 cm**

2. b) Calcul de JH.

On sait que les droites (BJ) et (AH) sont sécantes en C et les droites (JH) et (AB) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{CH}{CA} = \frac{JH}{AB} = \frac{CJ}{CB}$.
Soit $\frac{JH}{6} = \frac{2,5}{9}$ et JH = $\frac{6 \times 2,5}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$.
Conclusion : **La valeur exacte de JH est $\frac{5}{3}$ cm**.

2.c) Calcul de HM .

Les droites (BM) et (AH) sont sécantes en E et les droites (AB) et (HM) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{HM}{AB} = \frac{EH}{EA}$ soit $\frac{HM}{6} = \frac{2,5}{4}$ et HM = $\frac{6 \times 2,5}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$
Conclusion : **HM = 3,75 cm.**