

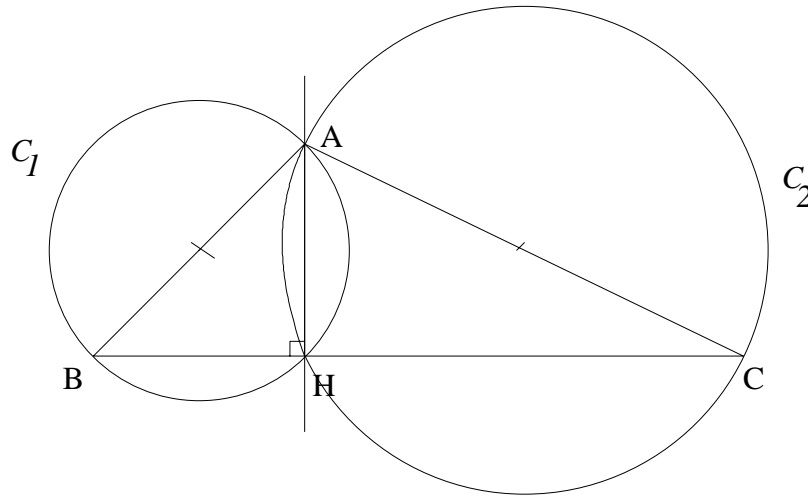
Thème N°17 :
ANGLE INSCRIT - ANGLE AU CENTRE
POLYGONES REGULIERS

Pour prendre un bon départ

Exercice n°1 : On considère un triangle ABC. Le cercle C_1 de diamètre [AB] coupe le segment [BC] en H.

1. Montrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
2. Montrer que le cercle C_2 circonscrit au triangle ACH a pour diamètre [AC].

Corrigé :



1. Montrons que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires

On sait que : [AB] est un diamètre de C_1 et H appartient au cercle.

Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.

Donc ABH est un triangle rectangle en H et ainsi $\widehat{BAH} = 90^\circ$.

Conclusion : (AH) est perpendiculaire à (BC).

2. Montrons que C_2 a pour diamètre [AC]

On sait que : AHC est un triangle rectangle en H (car (AH) est perpendiculaire à (HC)) et C_2 est le cercle circonscrit au triangle AHC.

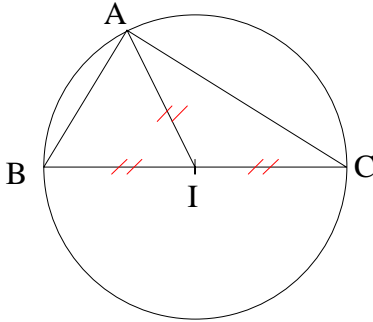
Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.

Conclusion : C_2 a pour diamètre [AC]

Exercice n°2 : Tracer un cercle de centre I et de diamètre [BC]. Soit A un autre point de ce cercle, distinct de B et de C.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Que représente le segment [AI] pour le triangle rectangle ABC ?
3. Que représente la longueur de [AI] par rapport à la longueur de l'hypoténuse [BC] ? justifier votre réponse.
4. Compléter la phrase suivante. « Dans un triangle rectangle, la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à.....»

Corrigé :



Nature du triangle ABC

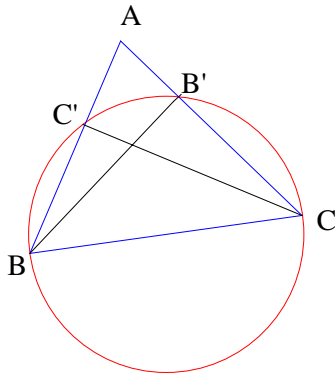
On sait que : [BC] est un diamètre du cercle de centre I et A un point de ce cercle.

Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.

Conclusion : **BAC est un triangle rectangle en A.**

1. [AI] représente la **médiane** issue de A.
2. AI est un rayon du cercle, donc : $AI = \frac{1}{2} BC$
3. Dans un triangle rectangle, la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale **à la moitié de l'hypoténuse.**

Exercice n°3 : On considère un triangle quelconque ABC. Le cercle de diamètre [BC] coupe [AB] en C' et [AC] en B'. Démontre que [BB'] et [CC'] sont des hauteurs du triangle ABC.



1. Démontrons que BB'C est un triangle rectangle en B'

On sait que [BC] est un diamètre du cercle et B' est un point du cercle.

D'après la propriété : Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.

Donc : **BB'C est un triangle rectangle en B'.**

2. Démontrons que BC'C est un triangle rectangle en C'

On sait que [BC] est un diamètre du cercle et C' est un point du cercle.

D'après la propriété : Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.

Donc : **BC'C est un triangle rectangle en C'.**

3. Démontrons que [BB'] et [CC'] sont des hauteurs du triangle ABC.

On sait que :

- (BB') est perpendiculaire à [AC] car BB'C est un triangle rectangle en B' et B' est un point de [AC].
- (CC') est perpendiculaire à [AB] car BC'C est un triangle rectangle en C' et C' est un point de [AB].

Or par définition : Dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Conclusion : Dans le triangle ABC ; [BB'] est la hauteur relative au côté [AC] et [CC'] est la hauteur relative du côté [BA].

Exercice n°4 :

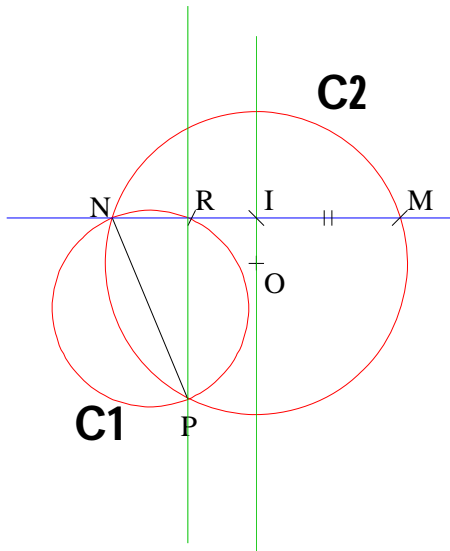
Trace un cercle de centre O.

Place les points M, N et P sur ce cercle.

Trace le cercle de diamètre [NP]. Ce cercle coupe la droite (MN) en un point nommé R.

Soit I le milieu du segment [MN].

Démontre que les droites (OI) et (PR) sont des droites parallèles.



1. Démontrons que (NR) est perpendiculaire à (NM)

On sait que [NP] est un diamètre du cercle **C1** et R est un point du cercle.

D'après la propriété : **Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.**

Donc : **NRP est un triangle rectangle en R.**

Ainsi : Comme R est un point de [MN], alors **(NR) est perpendiculaire à (MN)**

2. Démontrons que (OI) est perpendiculaire à (MN)

On sait que N et M sont deux points situés à égale distance de O car M et N sont deux points du cercle **C2**

D'après la propriété : **Si un point se trouve à égale distance des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.**

Donc O appartient à la médiatrice de [NM].

De plus comme I est le milieu de [NM], alors par définition de la médiatrice, **(OI) est la médiatrice du segment [NM].**

Ainsi : **(OI) est perpendiculaire à (NM)**

3. Démontrons que (IO) et (PR) sont parallèles

On sait que : (IO) perpendiculaire à (MN) et (PR) perpendiculaire à (MN).

D'après la propriété : **Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.**

Conclusion : Les droites (OI) et (PR) sont parallèles.

ACTIVITE :

A - OBSERVATIONS

1 : Dans un cercle de centre **O** et de rayon **R = 4 cm**,
on trace une corde **[AB]** telle que $AB = 4\sqrt{2} \approx 5,65$ cm.

♦ Montrer que **OAB** est un triangle rectangle :

$$AB^2 = (4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$$

$$OA^2 + OB^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$$

Comme $AB^2 = OA^2 + OB^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle **AOB** est rectangle en **O**

On en déduit que $mes(\widehat{AOB}) = 90^\circ$

\widehat{AOB} est l'angle au centre qui intercepte la corde **[AB]**
(son sommet est le **centre du cercle**).

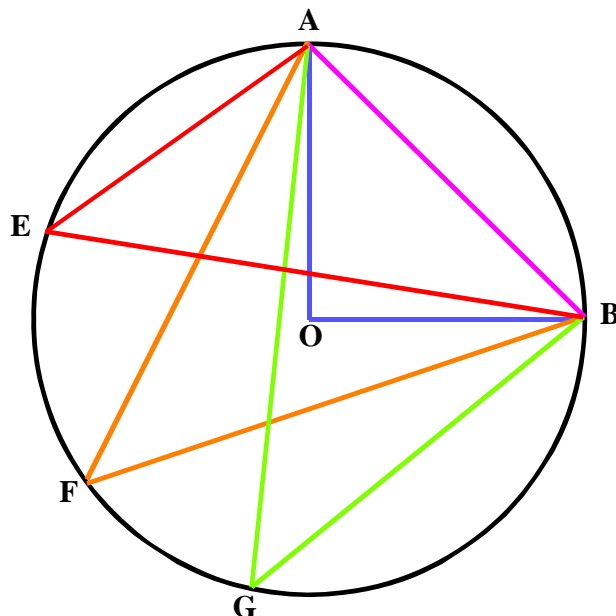
♦ En utilisant un rapporteur mesurer les angles :

$$mes(\widehat{AEB}) = 45^\circ \quad mes(\widehat{AFB}) = 45^\circ$$

$$mes(\widehat{AGB}) = 45^\circ$$

Ces trois angles sont des **angles inscrits** qui interceptent la même corde **[AB]** (leur sommet est **sur le cercle**).

$$\text{Remarque : } mes(\widehat{AEB}) = mes(\widehat{AFB}) = mes(\widehat{AGB}) = \frac{1}{2} \times mes(\widehat{AOB})$$



II Exemple 2 :

Dans un cercle de centre **I** et de rayon **R = 5 cm**,
on trace une corde **[AB]** telle que **AB = 5 cm**.

♦ Montrer que **IAB** est un triangle équilatéral :

$$\text{On a : } AI + IB = R = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Comme } AB = 5 \text{ cm, alors } AB = AI = IB$$

On en déduit que $mes(\widehat{AIB}) = 60^\circ$

\widehat{AIB} est l'angle au centre qui intercepte la corde **[AB]**
(son sommet est le **centre du cercle**)

♦ En utilisant un rapporteur mesurer les angles :

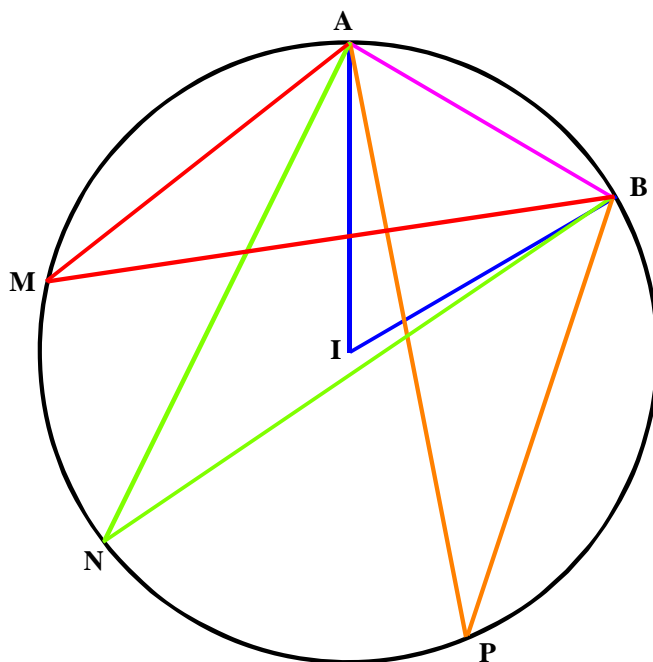
$$mes(\widehat{AMB}) = 30^\circ \quad mes(\widehat{ANB}) = 30^\circ$$

$$mes(\widehat{APB}) = 30^\circ$$

Ces trois angles sont des **angles inscrits** qui interceptent la corde **[AB]** (leur sommet est **sur le cercle**).

Remarque :

$$mes(\widehat{AMB}) = mes(\widehat{ANB}) = mes(\widehat{APB}) = \frac{1}{2} \times mes(\widehat{AIB})$$



B - PREUVES

1. Cas particulier

A, M et N sont trois points d'un cercle (C) de centre O. Le segment [MN] est un diamètre de (C). On pose $\widehat{AMN} = a$.

a. Quelle est la nature du triangle MOA ? Justifier.

M et A sont deux points d'un même cercle de centre O, donc $OA = OB$

Le triangle AOM est donc isocèle

b. Exprime \widehat{MOA} en fonction de a : $\widehat{MOA} = 180^\circ - 2a$

En déduire une relation entre les angles \widehat{AON} et \widehat{AMN} .

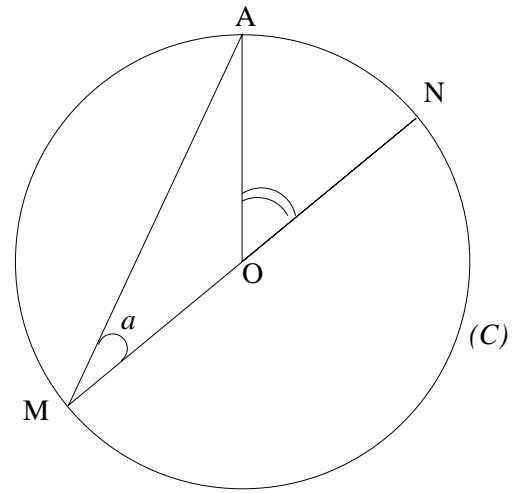
$$\widehat{AON} = 180^\circ - \widehat{MOA}$$

$$\widehat{AON} = 180^\circ - (180^\circ - 2a)$$

$$\widehat{AON} = 180^\circ - 180^\circ + 2a$$

$$\widehat{AON} = 2a$$

$$\widehat{AON} = 2\widehat{AMN}$$



Cas général

A, M et B sont trois points du cercle (C). Le segment [MN] est un diamètre de ce cercle.

On pose :

$$\widehat{AMN} = a \text{ et } \widehat{NMB} = b$$

Dans les deux cas de figure :

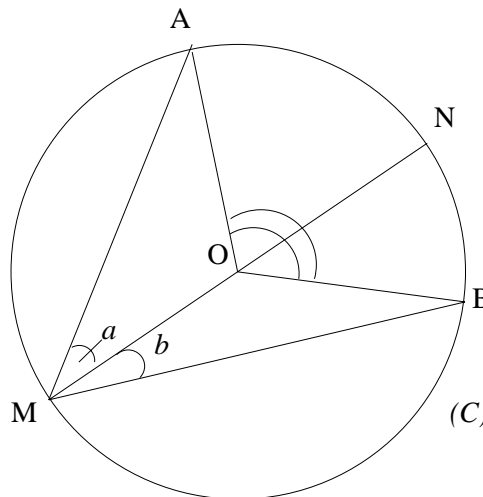


Figure 1

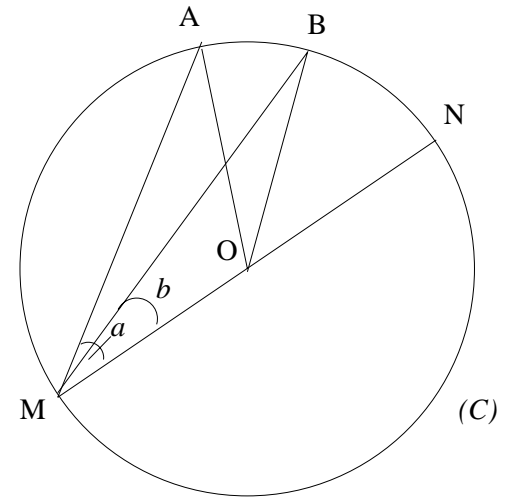


Figure 2

a. Exprime \widehat{AMB} en fonction de a et de b : (Figure 1) $\widehat{AMB} = a + b$ (Figure 2) $\widehat{AMB} = a - b$.

b. En utilisant l'égalité établie en 1., exprime \widehat{AON} en fonction de a et \widehat{NOB} en fonction de b

(Figure 1) $\widehat{AON} = 2a$ et $\widehat{NOB} = 2b$

(Figure 2) $\widehat{AON} = 2a$ et $\widehat{NOB} = 2b$.

c. En déduire une relation entre \widehat{AOB} et \widehat{AMB} .

Figure 1 : $\widehat{AOB} = \widehat{AON} + \widehat{NOB}$

$$\widehat{AOB} = 2a + 2b$$

$$\widehat{AOB} = 2(a + b)$$

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

Figure 2 : $\widehat{AOB} = \widehat{AON} - \widehat{NOB}$

$$\widehat{AOB} = 2a - 2b$$

$$\widehat{AOB} = 2(a - b)$$

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

C - BILAN

On vérifie les propriétés suivantes :

♦ dans un cercle, les angles inscrits qui interceptent la même corde [AB] ont la même mesure.

♦ dans un cercle, les angles inscrits ont une mesure égale à la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte la même corde [AB]. (les sommets des angles étant tous situés du même côté de la corde)

Exercice n°5 : Dans chacun des cas ci-dessous, indique si l'angle \widehat{APC} est inscrit ou non dans le cercle (C).

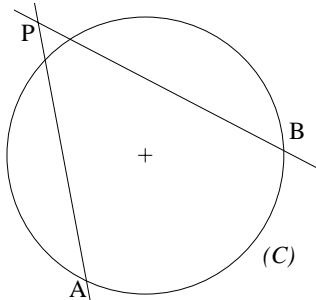


Figure 1

NON

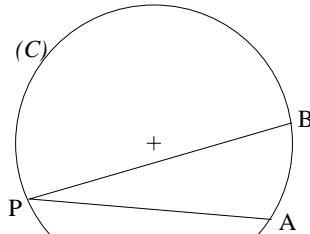


Figure 2

OUI

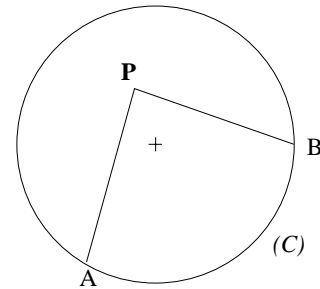
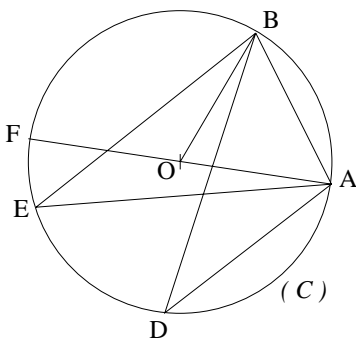


Figure 3

NON

Exercice n°6 :



(C) est un cercle de centre O.

Sans rapporteur, donne la mesure de chacun des angles suivants,

sachant que $\widehat{AOB} = 70^\circ$.

$$\widehat{ADB} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

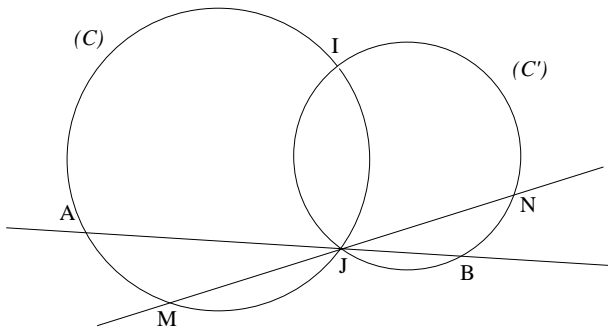
$$\widehat{AEB} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

$$\widehat{ABO} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$$

$$\widehat{BAF} = \frac{1}{2} \widehat{FOB} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$$

$$\widehat{BOF} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

Exercice n°7 :



Dans la figure ci-contre, les deux cercles (C) et (C') sont sécantes en I et J.

1. Démontre que : a. $\widehat{IAJ} = \widehat{IMJ}$.

b. $\widehat{IBJ} = \widehat{INJ}$.

2. En déduire que $\widehat{AIB} = \widehat{MIN}$.

Corrigé :

1. Démontrons que : $\widehat{IAJ} = \widehat{IMJ}$.

L'angle \widehat{IAJ} est un angle inscrit dans le cercle (C) qui intercepte l'arc IJ et l'angle \widehat{IMJ} est un angle inscrit qui intercepte le même arc IJ

D'après la propriété :

Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure

Donc :: $\widehat{IAJ} = \widehat{IMJ}$.

Démontrons que : $\widehat{IBJ} = \widehat{INJ}$.

L'angle \widehat{IBJ} est un angle inscrit dans le cercle (C) qui intercepte l'arc IJ et l'angle \widehat{INJ} est un angle inscrit qui intercepte le même arc IJ

D'après la propriété :

Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure

Donc :: $\widehat{IBJ} = \widehat{INJ}$.

2. En déduire que $\widehat{AIB} = \widehat{MIN}$.

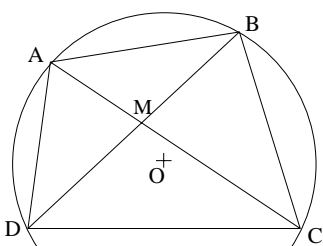
On a : $\widehat{AIB} = 180^\circ - (\widehat{IAJ} + \widehat{IBJ})$

Or d'après question 1., $\widehat{IAJ} = \widehat{IMJ}$ et $\widehat{IBJ} = \widehat{INJ}$.

Donc $\widehat{AIB} = 180^\circ - (\widehat{IMJ} + \widehat{INJ})$

$\widehat{AIB} = \widehat{MIN}$

Exercice n°8 :

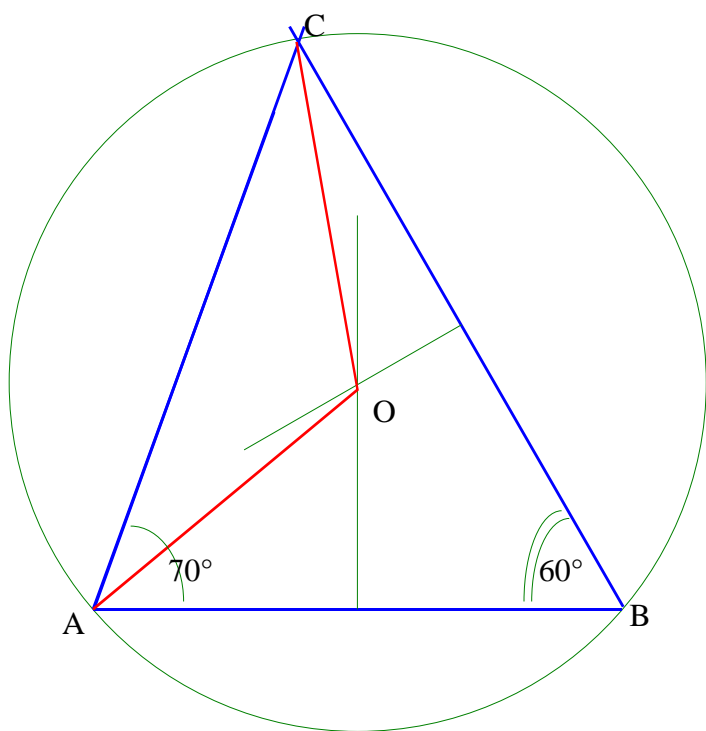


Un quadrilatère ABCD est inscrit dans un cercle (C) de centre O.
Ses diagonales se coupent en M.

Démontre que les angles des triangles ABM et DMC sont respectivement égaux.

Exercice n°9 :

1. On trace le segment $[AB]$ tel que $AB = 7$ cm. Place un point C tel que $\widehat{BAC} = 70^\circ$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$.
2. Construis le cercle circonscrit au triangle ABC , et appelle O son centre. On laissera les traits de construction.
3. Donne la mesure de l'angle \widehat{AOC} en justifiant la réponse.



On sait que :

- L'angle \widehat{ABC} est un angle au inscrit qui intercepte l'arc AC .
- L'angle \widehat{AOC} est un angle au centre qui intercepte le même arc AC .

Si dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit.

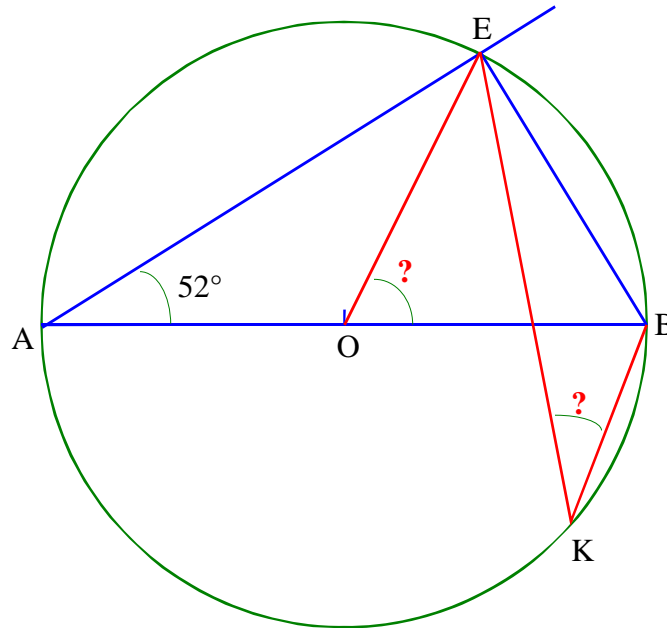
$$\text{Donc : } \widehat{AOC} = 2 \times \widehat{ABC} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

Conclusion : $\widehat{AOC} = 120^\circ$

Exercice n°10 :

1. Trace un cercle (C) de centre O et de diamètre $[AB]$ mesurant 8 cm. Place un point E sur ce cercle tel que \widehat{BAE} mesure 52° .
2. Montre que le triangle AEB est rectangle.

3. Sur le demi-cercle d'extrémités A et B, qui ne contient pas E, place un point K. Quelle est la valeur exacte des angles \widehat{EOB} et \widehat{EKB} ? Justifie.



- 2°) On sait que : - [AB] est un diamètre du cercle de centre O,
- E est un point de ce cercle.

Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.

Conclusion : **AEB est un triangle rectangle en E.**

3°) Calcul de \widehat{EOB}

- On sait que : - L'angle \widehat{EOB} est un angle au centre qui intercepte l'arc EB.
- L'angle \widehat{EAB} est un angle inscrit qui intercepte le même arc EB.

Si dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit.

Donc : $\widehat{EOB} = 2 \times \widehat{EAB} = 2 \times 52^\circ = 104^\circ$

Conclusion : **$\widehat{EOB} = 104^\circ$**

Calcul de \widehat{EKB}

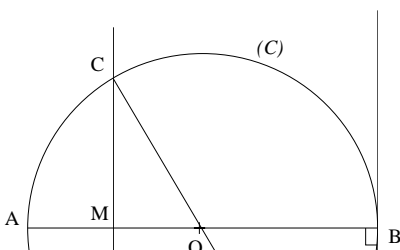
On sait que : \widehat{EAB} et \widehat{EKB} sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc EB.

Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure.

Donc $\widehat{EAB} = \widehat{EKB} = 52^\circ$

Conclusion : **$\widehat{EKB} = 52^\circ$**

Exercice n°11 :



La figure n'est pas en vraie grandeur.

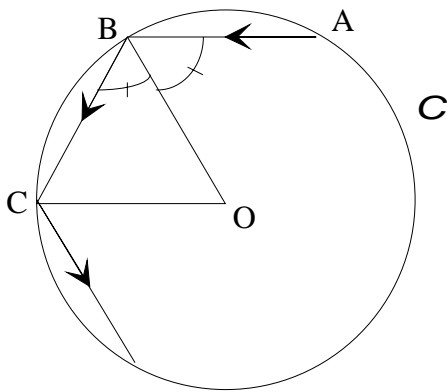
Le rayon du cercle (C) de centre O est égal à 3 cm.

[AB] est un diamètre de ce cercle.

Les points C et D appartiennent au cercle et la droite (CD) est la médiatrice du rayon [OA].

La droite (OC) coupe T la tangente au cercle (C) au point B

ACTIVITE 2 : A - « Le billard circulaire »



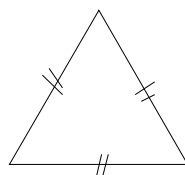
En partant du point A, la boule heurte en B le bord du billard circulaire de centre O et rebondit symétriquement à sa trajectoire initiale par rapport au rayon [OB]. Elle rebondit ensuite toujours selon la même loi (symétrie par rapport au rayon). Le billard mesure 2 m de diamètre.

- Quelle est la nature du triangle AOB si $\hat{ABO} = 60^\circ$?
- Calcule \hat{ABC} .
- Démontre que la trajectoire est un polygone dont les côtés ont la même longueur et tous les angles sont égaux. **C'est un hexagone régulier.**
- Représente, à l'échelle 1/20, le billard et la trajectoire d'une boule dans ce cas.
- Représente, à l'échelle 1/20, le billard et la trajectoire d'une boule dans le cas où $\hat{ABO} = 45^\circ$.

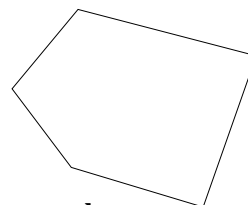
B - Polygones réguliers

- Construis un hexagone régulier ABCDEF de 4 cm de côté.
 - Quelle est la nature du polygone ACE ? Est-ce un polygone régulier ?
- Calcule les angles « au centre » \hat{AOC} , \hat{COE} , \hat{EOA} .

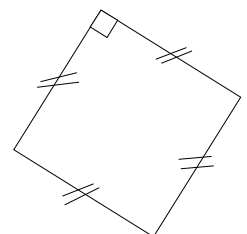
Exercice n°12 : Parmi les polygones suivants, quels sont ceux qui sont réguliers ?



a.



b.



c.

Par définition :

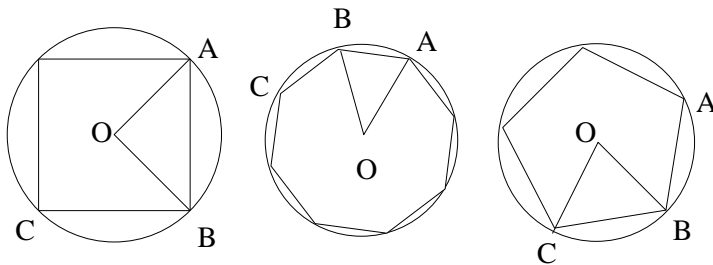
Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la **même longueur** et dont tous les sommets appartiennent à un **même cercle**.

Tous les angles d'un polygone régulier ont la **même mesure**.

La figure **a.** est un triangle équilatéral car tous ses côtés ont même mesure et les angles mesurent tous 60° , il s'agit donc d'un **polygone régulier**.

La figure **b.** étant un polygone quelconque, il n'est pas régulier.

La figure **c.** est un carré car un losange ayant angle droit a donc tous ses côtés de même longueur et ses angles mesurent 90° . Il s'agit donc d'un **polygone régulier**.



a. 4 côtés
(carré)

b. 8 côtés
(octogone)

c. 5 côtés
(pentogone)

Exercice n°13 : On a représenter des polygones réguliers.

1. Calcule les angles \hat{AOB} et \hat{ABC} .

Pour le carré : $\hat{AOB} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ et $\hat{ABC} = 2 \times \hat{OBA} = 2 \times \frac{(180^\circ - 90^\circ)}{2} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Pour l'octogone : $\hat{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ et $\hat{ABC} = 2 \times \hat{OBA} = 2 \times \frac{(180^\circ - 45^\circ)}{2} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

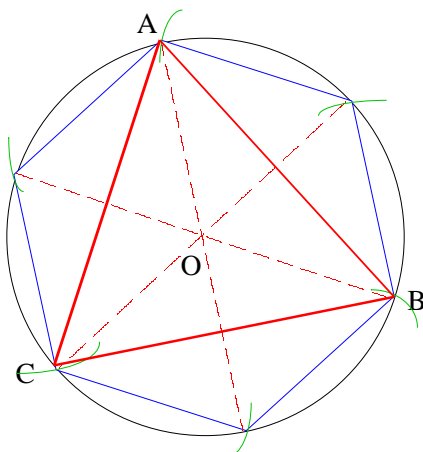
Pour le pentagone : $\hat{AOB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ et $\hat{ABC} = 2 \times \hat{OBA} = 2 \times \frac{(180^\circ - 72^\circ)}{2} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

2. Vérifie que dans chacun des cas : $\hat{AOB} + \hat{ABC} = 180^\circ$

Pour le carré : $\hat{AOB} + \hat{ABC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Pour l'octogone : $\hat{AOB} + \hat{ABC} = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$

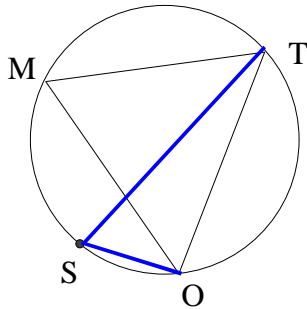
Pour le pentagone : $\hat{AOB} + \hat{ABC} = 72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$



Exercice n°14 : Construis un triangle équilatéral ABC de centre O.

Calcule la mesure de l'angle \hat{AOB} .

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$



Exercice n°15 : Le triangle MOT suivant est équilatéral.

Calcule la mesure de l'angle \widehat{OST} .

On sait que : \widehat{TMO} et \widehat{TSO} sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc TO.

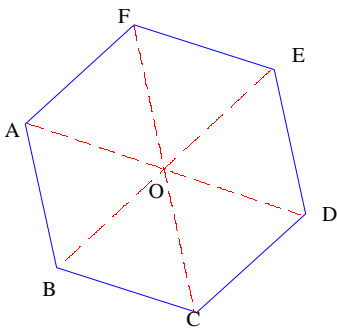
Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure.

Donc $\widehat{TMO} = \widehat{TSO} = 60^\circ$ (Car dans un triangle équilatéral, les angles mesurent tous 60°)

Conclusion : $\widehat{TSO} = 60^\circ$

Exercice n°16 : On considère un hexagone régulier ABCDEF de centre O.

Calcule la mesure de l'angle \widehat{BAC} .



Calcul de l'angle au centre : $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Calcul de l'angle \widehat{ABC} : $\widehat{ABC} = 2 \times \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Calcul de l'angle \widehat{BAC}

$$\widehat{BAC} = \frac{180^\circ - \widehat{ABC}}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$