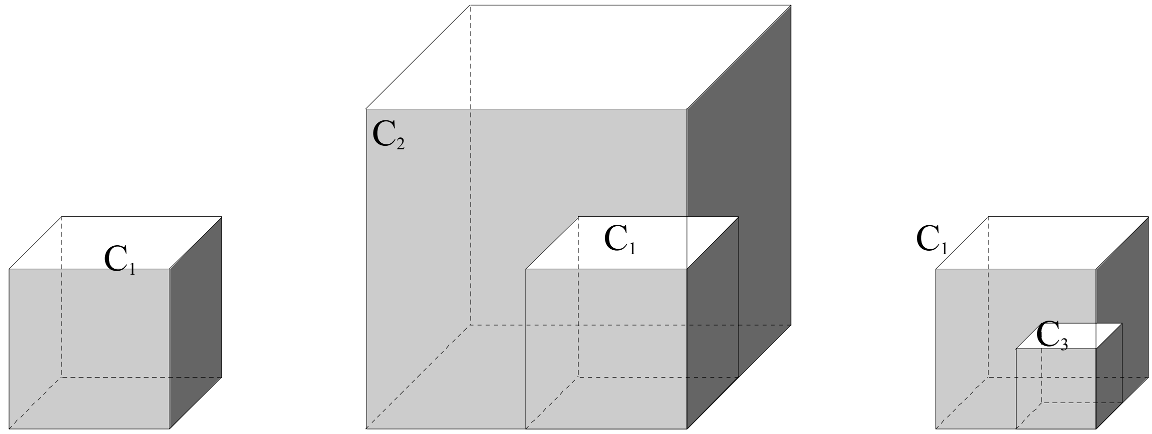
Thème N°15 :

PROPORTIONNALITE (3)
GRANDEUR COMPOSES

ACTIVITE 1:



On mettra les résultats dans le tableau ci-dessous.

1°) On considère un cube C_1 d'arête 3 cm. Calcule l'aire de chaque face du cube et le volume de ce cube.

Aire $C_1 = 3^2 = 9$ (cm²) **Volume $C_1 = 3^3 = 27$ (cm ^{3})** .

2°) On multiplie la longueur des arêtes par 2 ; on obtient le cube C_2.

a) Quelle est la longueur des arêtes du cube C_2 ? : **$2 \times 3 = 6$ (cm)**

b) Calcule l'aire de chaque face du cube C_2 et le volume de ce cube.

Aire $C_2 = 6^2 = 36$ (cm²) **Volume $C_2 = 6^3 = 216$ (cm ^{3})**

c) Par quel nombre l'aire de chaque face du cube C_1 a-t-elle été multipliée pour obtenir l'aire de chaque face du cube C_2 ? : **L'aire a été multipliée par $2^2 = 4$ (36 : 9 = 4)**

Même question pour le volume : **Le volume a été multiplié par $2^3 = 8$ (216 : 27 = 8)**

3°) On divise la longueur des arêtes de C_1 par 2; on obtient le cube C_3.

a) Quelle est la longueur des arêtes du cube C_3 ? **3 : 2 = 1,5 (cm)**

b) Calcule l'aire de chaque face du cube C_3 et le volume de ce cube.

Aire $C_3 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ (cm²) **Volume $C_3 = 1{,}5^3 = 3{,}375$ (cm ^{3})** .

c) Par quel nombre la longueur de chaque arête du cube C_1 a-t-elle été multipliée pour obtenir la longueur de chaque arête du cube C_3 ? **La longueur a été multipliée par 0,5 ($3 \times 0{,}5 = 1{,}5$ (cm))**

Même question pour l'aire de chaque face et pour le volume :
L'aire a été multipliée par $0{,}5^2 = 0{,}25$ (2,25 : 9 = 0,25)
Le volume a été multiplié par $0{,}5^3 = 0{,}125$ (3,375 : 27= 0,125)

4°) Reprends le questionnement sur l'aire des faces et le volume dans le cas où la longueur des arêtes a été multipliée par un nombre positif *k*.

	Longueur de l 'arête	Aire d'une face	Volume du cube
cube C_1	3	9	27
cube C_2	6 ($\times$ 2)	36 ($\times 2^2$)	216 ($\times 2^3$)
cube C_3	1,5 ($\times$ 0,5)	2,25 ($\times 0,5^2$)	3,375 ($\times 0,5^3$)
cube C_k	$3 \times k$	$9 \times k^2$	$27 \times k^3$

On dit que le cube C_2 est un **agrandissement** du cube C_1 dans le **rapport d'agrandissement** **2**

et que le cube C_3 est une **réduction** du cube C_1 dans le **rapport de réduction** $\frac{1}{2}$.

Quand on applique une réduction ou un agrandissement de rapport *k* (*k* est compris entre 0 et 1 dans une réduction, *k* est supérieur à 1 pour un agrandissement), on **multiplie** ses dimensions (les **longueurs**) par ***k***
Mais attention, les **aires** sont multipliées par k^2. et les **volumes** par k^3

Exercice n°1 :

On multiplie par 0,9 les dimensions d'un rectangle.

1. Est-ce une réduction ou un agrandissement ?

   Comme 0,9 < 1 , alors il s'agit d'une réduction.

2. Par quel nombre est multiplié :
   a. son périmètre ? :

      Son périmètre est multiplié par 0,9

   b. son aire ? :

      Son aire est multiplié par $(0,9)^2$

Exercice n°2 :

On multiplie par 1,3 le rayon d'un cercle.

1. Est-ce un agrandissement ou une réduction ? :

   Comme 1,3 > 1 , alors il s'agit d'un agrandissement

2. Par quel nombre est multiplié :
   a. le diamètre ? :

      Le diamètre est multiplié par 1,3

   b. la longueur du cercle ? :

      La longueur du cercle est multiplié par 1,3

   c. l'aire du disque ? :

      L'aire du disque est multipliée par $(1,3)^2 = 1,69$

Exercice n°3 :

Par quel nombre faut-il diviser l'arête d'un cube pour que son volume soit divisé par 125 ? :

On a $\frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$. Il faut donc diviser l'arête d'un cube par 5

Exercice n°4 :

Un plateau de table rectangulaire mesure 60 cm sur 1,10 m. L'épaisseur du plateau est 18 mm.

1. a. Calcule l'aire du plateau, en m² :

Aire = $0,6 \times 1,10 = 0,66$ (m²)

b. Calcule le volume du plateau, en m³ :

Volume = $0,66 \times 0,018 = 0,01188$ (m³)

2. On réalise un modèle réduit du plateau (réduction de coefficient 0,75). En utilisant les réponses aux questions **1.a.** et **b.** , calcule :

a. l'aire du plateau réduit :

Aire = $0,66 \times 0,75^2 = 0,37125$ (m²)

b. son volume :

Volume = $0,01188 \times 0,75^3 \approx 0,005$ (m³)

Exercice n°5:

a) La pyramide de sommet O et de hauteur OT est une réduction de la pyramide de sommet O et de hauteur OI.

Le rapport de réduction est : $k = \frac{OT}{OI} = \frac{1,5}{5} = 0,3$

Soit A l'aire de la base ABSR, on a : A = $4^2 = 16$ (cm²)

Soit A ' l'aire de la section , on a : A ' = $k^2 \times$ A = $0,3^2 \times 16 = 1,44$

Conclusion : **l'aire de section est 1,44 cm²**

b) On a : A' = $k^2 \times$ A avec A ' = 2,56 cm² et A = 16 cm²

Donc : $k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{2,56}{16} = 0,16$. Et le coefficient de réduction est donc : $k = \sqrt{0,16} = 0,4$

Ainsi, la distance du sommet au plan est : OI $\times k = 5 \times 0,4 = 2$

Conclusion : **Il faut placer le plan à 2 cm du sommet**

c) Cherchons d'abord la hauteur de la pyramide

• Calcul de RB

Dans le triangle ABR rectangle en A (car ABSR est un carré), d'après le théorème de Pythagore, on a :

RB² = AB² + AR²

RB² = 6² + 6²

RB² = 36 + 36

RB² = 72

RB = $\sqrt{72}$

Conclusion : RB = $\sqrt{72}$ cm

• Calcul de IB

On a : $IB = \frac{RB}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2} = \sqrt{\frac{72}{4}} = \sqrt{18}$

Conclusion : IB = $\sqrt{18}$ cm

• Calcul de OI

Dans le triangle AIO rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AO^2 = AI^2 + IO^2$
$6^2 = \sqrt{18}^{\,2} + IO^2$ (AO = AB car les triangles sont équilatéraux)
$IO^2 = 36 - 18$
$IO^2 = 18$
$IO = \sqrt{18}$
Conclusion : $IO = \sqrt{18}$ cm

• Calcul du coefficient de réduction
On a : $A' = k^2 \times A$ avec $A' = 2$ cm² et $A = 6^2 = 36$ cm²
Donc : $k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Et le coefficient de réduction est donc : $k = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}}$
• Calcul de la distance au sommet
Ainsi, la distance du sommet au plan est : $OI \times k = \sqrt{18} \times \frac{1}{\sqrt{18}} = 1$
Conclusion : **Il faut placer le plan à 1 cm du sommet**

Exercice n°6:
a) • Calcul de AS dans le triangle ASU rectangle en U.
Dans le triangle ASU rectangle en U, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AS^2 = AU^2 + US^2$
$AS^2 = 6^2 + 8^2$
$AS^2 = 36 + 64$
$AS^2 = 100$
$AS = \sqrt{100}$
$AS = 10$
Conclusion : AS = 10 cm

• Calcul du coefficient de réduction
La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone qui est une réduction du polygone de base.
Donc si A est l'aire de la section réduite, B est l'aire de la base AMU et k le coefficient de réduction, alors $A = k^2 B$.
Et d'après l'énoncé, $A = 0{,}16\,B$ donc $k^2 = 0{,}16$ et ainsi $\boldsymbol{k = 0{,}4}$

• Calcul de OS
On a : $OS = k \times AS = 0{,}4 \times 10 = 4$
Conclusion : **OS = 4 cm**

b) • Calcul de RA
Dans le triangle MAR rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$MR^2 = MA^2 + AR^2$
$5^2 = 3^2 + AR^2$
$AR^2 = 25 – 9$
$AR^2 = 16$
$AR = \sqrt{16}$
$AR = 4$
Conclusion : AR = 4 cm

• Calcul de l'aire du triangle MAR

Soit A l'aire du triangle MAR, on a : $A = \frac{MA \times RA}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$.

Conclusion : l'aire du triangle MAR égale 6 cm²

- Calcul du volume de la pyramide OMAR

Si V est le volume, on a : $V = \frac{1}{3}(\text{ aire de la base} \times \text{hauteur }) = \frac{A \times OM}{3} = \frac{6 \times 6}{3} = 12$

Conclusion : $V = 12\text{ cm}^3$

- Calcul du coefficient de réduction :

soit k le coefficient de réduction, on a : $k = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- Calcul du volume de la petite pyramide

Soit V ' le volume de la petite pyramide, on a : $V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V = \frac{1}{27} \times 12 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

Conclusion : **Le volume de la pyramide obtenue est $\frac{4}{9}$ cm³**

ACTIVITE 2 : LES POURCENTAGES

♦ *Ex* ① : Dans un magasin un article coûtait 25 €, son prix augmente de 12%. Calculer son nouveau prix.

Ancien prix	25	100
Augmentation	$\boldsymbol{a}$ = **3**	12
Nouveau prix	**28**	**112**

Calcul de l'augmentation avec le "produit en croix" $\boldsymbol{a} = \dfrac{25 \times 12}{100} = \mathbf{3}$

Nouveau prix : 25 + **3** = **28**

Remarque : Le nouveau prix est : 25 × **1,12** = **28** **(1,12 = 1 + 0,12)**

Calculer 12 % d'une quantité, revient à la *multiplier* par : $\boxed{\mathbf{0{,}12}}$

Augmenter une quantité de 12 %, revient à la *multiplier* par : $\boxed{\mathbf{1{,}12}}$

♦ *Ex* ② : Dans un magasin un article coûtait 32 €, son prix diminue de 18 %. Calculer son nouveau prix.

Ancien prix	**32**	**100**
Diminution	$\boldsymbol{d}$ = **5,76**	**18**
Nouveau prix	**26,24**	**82**

Calcul de la diminution avec le "produit en croix" :

$$\boldsymbol{d} = \frac{32 \times 18}{100} = \mathbf{5{,}76}$$

Nouveau prix : **32 – 5,75 = 26,24**

Remarque : Le nouveau prix est : 32 × **0,82** = **26,24** **(0,82 = 1 – 0,18)**

Calculer 18 % d'une quantité, revient à la *multiplier* par : $\boxed{\mathbf{0{,}18}}$

Diminuer une quantité de 18 %, revient à la *multiplier* par : $\boxed{\mathbf{0{,}82}}$

Conclusion :

Calculer :	10 %	20 %	50 %	15 %	25 %	60 %	5 %	17 %	7,5 %
C'est multiplier par :	**0,1**	**0,2**	**0,5**	**0,15**	**0,25**	**0,6**	**0,05**	**0,17**	**0,075**
Augmenter de :	10 %	20 %	50 %	15 %	25 %	60 %	5 %	17 %	7,5 %
C'est multiplier par :	**1,1**	**1,2**	**1,5**	**1,15**	**1,25**	**1,6**	**1,05**	**1,17**	**1,075**
Diminuer de :	10 %	20 %	50 %	15 %	25 %	60 %	5 %	17 %	7,5 %
C'est multiplier par :	**0,9**	**0,8**	**0,5**	**0,85**	**0,75**	**0,4**	**0,95**	**0,83**	**0,925**

♦ *Ex* ③ : Dans un magasin, après une augmentation de 12 %, un article coûte 14 €. Calculer son ancien prix.

Ancien prix	$\boldsymbol{x}$ **= 12,5**	100
Augmentation	**12,5**	12
Nouveau prix	**14**	**112**

Autre présentation (sans tableau) :

Soit $\boldsymbol{x}$ l'ancien prix : x × **1,12** = 14

x = **14 : 1,12**

x = **12,50**

L'ancien prix est : **12,50 €**

♦ *Ex* ④ : Dans un magasin, après une diminution de 25 %, Soit x l'ancien prix : $x \times \mathbf{0{,}75} = \mathbf{26{,}40}$ on a alors : $x = \mathbf{26{,}40 : 0{,}75 = 35{,}20}$ **(€)**

♦ *Ex* ⑤ : Dans un magasin le prix d'un article passe de 28 € à 32,20 €. Calculer le pourcentage d'augmentation.

Ancien prix	**28**	100
Augmentation	**4,20**	x **= 15**
Nouveau prix	**32,20**	**115**

Augmentation : **32,20 – 28** = **4,20**

$x \times \mathbf{28} = \mathbf{4{,}20} \times \mathbf{100}$

$$x = \frac{4{,}20 \times 100}{28} = \mathbf{15}$$

Le pourcentage d'augmentation est : **15 %**

♦ *Ex* ⑥ : Dans un magasin le prix d'un article passe de 30 € à 24,60 €. Calculer le pourcentage de diminution.

Ancien prix	**30**	**100**
Diminution	**5,40**	x **= 18**
Nouveau prix	**24,60**	**82**

Diminution : **30 – 24,60** = **5,40**

$x \times \mathbf{30} = \mathbf{5{,}40} \times \mathbf{100}$

$$x = \frac{5{,}40 \times 100}{30} = \mathbf{18}$$

Le pourcentage de diminution est : **18 %**

Pour calculer le pourcentage d'augmentation : $\boxed{\dfrac{\textit{Augmentation} \times 100}{\textit{Prix de départ}}}$

Pour calculer le pourcentage de diminution : $\boxed{\dfrac{\text{Diminution} \times 100}{\text{Prix de départ}}}$

* *

Exercice n°6 : 12 % (× 1,12) ; 25 % (× 1,25) ; 5,5 % (× 1,055) ; 20,6 % (× 1,206)

Exercice n°7 : On a : $420 \times (1 + \dfrac{20{,}6}{100}) = 420 \times 1{,}206 = 506{,}52$

Le prix toutes taxes comprises est 506,52 €

Exercice n°8 : On a : $43\,200 \times (1 + \dfrac{1{,}5}{100}) = 43\,200 \times 1{,}015 = 43\,848$

En 1998, il y a 43 848 habitants

Exercice n°9 : 8 % (× 0,92) ; 25 % (× 0,75) ; 11 % (× 0,89) ; 12,5 % (× 0,875)

Exercice n°10 : On a : $5 \times (1 - \dfrac{20}{100}) = 5 \times 0{,}8 = 4$ La masse de café torréfié est 4 tonnes.

Exercice n°11 : On a : $45\,000 \times (1 - \dfrac{35}{100}) = 45\,000 \times 0{,}65 = 29\,250$

Son revenu s'élève en 1998 à 29 250 €

Exercice n°12 : 45 cL = 0,45 L 24,5 t = 24 500 kg 12,5 ha = 125 000 m^2
43 000 mm^3 = 0,043 dm^3 18,5 cm^3 = 1,85 cL 745 cm^2 = 0,0745 m^2

Exercice n°13 : 1. 450 cL = 4,5 L ; 2,45 t = 2 450 kg ; 7,5 ha = 75 000 m^2 ; 25 000 mm^3 = 0,025 dm^3
2,85 cm^3 = 0,285 cL ; 45 mL = 45 $cm^3$3750 cm^2 = 0,3750 m^2 ; 7,5 kg/dm^3 = 7 500 g / dm^3 = 75 g/cL

2. $\pi \times 16^2 \times 40 \approx 32\ 153$ cm^3 $\approx$ 3,215 36 L.

3. $\frac{1}{3} \times 5^2 \times 9 = 75$ cm^3 .

Exercice n° 14: En 4 s, le robinet débite 500 cm^3 , d'où en 1 s, le robinet débite 125 cm^3 (500 : 4).
125 cm^3 / s = 0,125 dm^3 / s = 0,125 L / s = 0,125 × 60 L / min = 7,5 L / min
Conclusion : 125 cm^3 / s = 7,5 L / min

Exercice n° 15: Dans un film, le débit des images diffusées est de 24 images par seconde. Combien d'images comprend un film d'une durée de 1 h 20 min ?
1 h 20 min = 3 600 s + 20 × 60 s = 4 800 s
Pour 1 s, il y a 24 images. Donc pour 4 800 s, il y a 24 × 4 800 = 115 200
Conclusion : En 1 h 20 min, il y a 115 200 images

Exercice n° 16: On a 1 m^3 = 1 000 dm^3 = 1 000 L
Dans 1 000 L, il y a 740 kg

Donc dans 42 L, il y a $740 \times \frac{42}{1000} = 31{,}08$ (kg)

La masse d'essence est de 31,08 kg.

Exercice n° 17: Volume du bloc : 10^3 = 1 000 (cm^3).
On a 7,8 × 1 000 = 7 800 (g) = 7,8 (kg)
Conclusion : La masse du bloc est de 7,8 kg

Exercice n° 18: 20 min = 20 / 60 h = 1/3 h
On a : E = P × t = 1 × 1/3 . Conclusion : E = 1/3 Wh

Exercice n° 19: a) 108 km/h = 108 000 m / h = 108 000 : 3 600 m / s = 30 m/s
b) 2 m/s = 0,002 km / s = 0,002 × 3 600 = 7,2 km / h.

Exercice n° 20: 1 jour = 24 h , soit 1 h = 1 / 24 (jour).

D'où 12 000 Wh = 12 kW h = $12 \times \frac{1}{24}$ kWj = 0,5 kWj

Exercice n°21 : **1.** Prix T.T.C. = 230 × (1 + 19,6/100) = 230 × 1,196 = 275,08 Le Prix T.T.C. est 275,08 F
2. Soit x son ancien prix, on a : $x \times 0{,}82 = 262{,}40$ soit $x = 262{,}40 : 0{,}82 = 320$

Son ancien prix était de 320 F.

3. •On a : 280 × 1,05 × 1,18 = 346,92 Conclusion : Son ancien prix en juin est de 346, 92 F

• On a : $\frac{(346{,}92 - 280) \times 100}{280} = 23{,}9$. Conclusion : Le pourcentage total d'augmentation est de 23,9 %

Exercice n°22 : **1.** Soit k le coefficient d'augmentation, on a : $k = 1 + \frac{30}{100} = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$

L'aire est donc augmentée de $k^2 = 1{,}3^2 = 1{,}69 = 1 + 0{,}69 = 1 + \frac{69}{100}$

Conclusion : le pourcentage d'augmentation de l'air est de 69%

2. Soit V le volume de la maquette, on a : $V = \left(\frac{1}{20}\right)^3 \times 2600 = 0{,}325$

Conclusion : le volume de la maquette est de $0{,}325\ dm^3$.

Soit M la masse de la maquette, on a : M = 7,8 × 0,325 = 2, 535

Conclusion : la masse de la maquette est de 2,535 kg

3. On a : $125 = 5^3$. Les arêtes sont donc multipliées par 5

Exercice n°23 : **1.** • On a : E = P × t avec P = 1 500 W et t = 6 × 30 = 180 heures

D'où : E = 1 500 × 180 = 270 000 W h = 270 kWh

Conclusion : L'énergie consommée est de 270 kWh.

• On a : 270 × 0,65 = 175,50 . La dépense s'élève par mois à 175,50 F

2. On a : Vitesse = Distance parcourue : temps = 21,6 : 48 = 0,45 Soit 0,45 km/min

De plus, 0,45 × 60 = 27 d'où : vitesse = 27 km/h

3. On a Distance = $\frac{24 \times 35}{60} = 14$. La distance parcourue est de 14 km.

Exercice n°24 : **1.** Prix T.T.C. = 35 × (1 + 19,6/100) = 35 × 1,196 = 41,86 Le Prix T.T.C. est 41,86 €

2. Soit x son ancien prix, on a : x × 0,88 = 31,68 soit x = 31,68 : 0,88 = 36

Son ancien prix était de 36 €.

3. •On a : 28 × 1,08 × 1,15 = 34,776 Conclusion : Son ancien prix en juin est de 34,78 €

• On a : $\frac{(34{,}776 - 28) \times 100}{28} = 24{,}2$. Conclusion : Le pourcentage total d'augmentation est de 24,2 %

Exercice n°25 : **1.** Soit k le coefficient d'augmentation, on a : $k = 1 + \frac{40}{100} = 1 + 0{,}4 = 1{,}4$

L'aire est donc augmentée de $k^2 = 1{,}4^2 = 1{,}96 = 1 + 0{,}96 = 1 + \frac{96}{100}$

Conclusion : le pourcentage d'augmentation de l'air est de 96%

2. Soit A l'aire du champ, on a : $A = 120\,000 \times \left(\frac{1}{20\,000}\right)^2 = 0{,}0003$ avec $0{,}000\,3\ m^2 = 3\ cm^2$

Conclusion : l'aire du champ est $3\ cm^2$.

3. Soit V le volume de la statue, on a : $V = 120 \times 20^3 = 960\,000\ cm^3 = 960\ dm^3$

Conclusion : le volume de la statue est de $960\ dm^3$

On a : 960 × 0,9 = 864 . La masse de la statue est de 864 kg

Exercice n°26 : **1.** • On a : E = P × t avec P = 1 200 W et t = 8 × 30 = 240 heures

D'où : E = 1 200 × 240 = 288 000 W h = 288 kWh

Conclusion : L'énergie consommée est de 288 kWh.

- On a : $288 \times 0{,}12 = 34{,}56$. La dépense s'élève par mois à 34,56 €

2. On a : Vitesse = Distance parcourue : temps = $16 : 36 \approx 0{,}44$ Soit 0,45 km/min

De plus, $0{,}45 \times 60 = 27$ d'où : vitesse = 27 km/h