THEME 10 : NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS / ARITHMETIQUE

Exercice n°1:

1.

$$A=\frac{12}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{7}{9}$$
$$A=\frac{12}{5}-\frac{3\times7}{5\times3\times3}$$
$$A=\frac{12}{5}-\frac{7}{15}$$
$$A=\frac{36}{15}-\frac{7}{15}$$
$$A=\frac{36-7}{15}$$
$$A=\frac{29}{15}$$

2.

$$B=\left(\frac{2}{3}-3\right)\div\frac{1}{9}$$
$$B=\left(\frac{2}{3}-\frac{9}{3}\right)\div\frac{1}{9}$$
$$B=\frac{2-9}{3}\div\frac{1}{9}$$
$$B=-\frac{7}{3}\times\frac{9}{1}$$
$$B=-\frac{7\times3\times3}{3}$$
$$B=-21$$

Exercice n°2: .

$a+b+c$
$$=\frac{2}{3}+(-3)+\frac{-3}{4}$$
$$=\frac{8}{12}-\frac{36}{12}-\frac{9}{12}$$
$$=\frac{8-36-9}{12}$$
$$=-\frac{37}{12}$$

$a+bc$
$$=\frac{2}{3}+(-3)\times\frac{-3}{4}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{9}{4}$$
$$=\frac{8}{12}+\frac{27}{12}$$
$$=\frac{8+17}{12}$$
$$=\frac{35}{12}$$

$\frac{a}{b}+c$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{-3}+\frac{-3}{4}$$
$$=-\frac{2}{3}\div3+\frac{-3}{4}$$
$$=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{-3}{4}$$
$$=-\frac{2}{9}-\frac{3}{4}$$
$$=-\frac{8}{36}-\frac{27}{36}$$
$$=\frac{-8-27}{36}$$
$$=-\frac{35}{36}$$

$\frac{a}{b+c}$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{\left(-3+\frac{-3}{4}\right)}$$
$$=\frac{2}{3}\div\left(-\frac{12}{4}+\frac{-3}{4}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\div\left(\frac{-12-3}{4}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\div\left(-\frac{15}{4}\right)$$
$$=-\frac{2}{3}\times\frac{4}{15}$$
$$=-\frac{8}{45}$$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
$$=\frac{1}{\frac{2}{3}}+\frac{1}{-3}+\frac{1}{\frac{-3}{4}}$$
$$=1\div\frac{2}{3}+1\div(-3)+1\div\frac{-3}{4}$$
$$=1\times\frac{3}{2}+1\times\frac{-1}{3}+1\times\frac{-4}{3}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}$$
$$=\frac{9}{6}-\frac{2}{6}-\frac{8}{6}$$
$$=\frac{9-2-8}{6}$$
$$=-\frac{1}{6}$$

Exercice n°3 :

$$A=9\times\frac{3}{2}-10$$
$$A=\frac{27}{2}-10$$
$$A=\frac{27}{2}-\frac{20}{2}$$
$$A=\frac{27-20}{2}$$
$$A=\frac{7}{2}$$

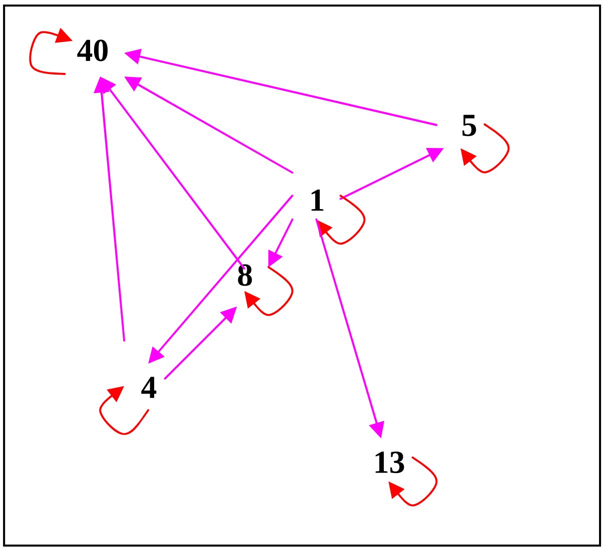
$$B=\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$$
$$B=\frac{3}{5}-\frac{2\times1}{5\times2\times2}$$
$$B=\frac{3}{5}-\frac{1}{10}$$
$$B=\frac{6}{10}-\frac{1}{10}$$
$$B=\frac{6-1}{10}$$
$$B=\frac{5}{10}$$
$$B=\frac{1}{2}$$

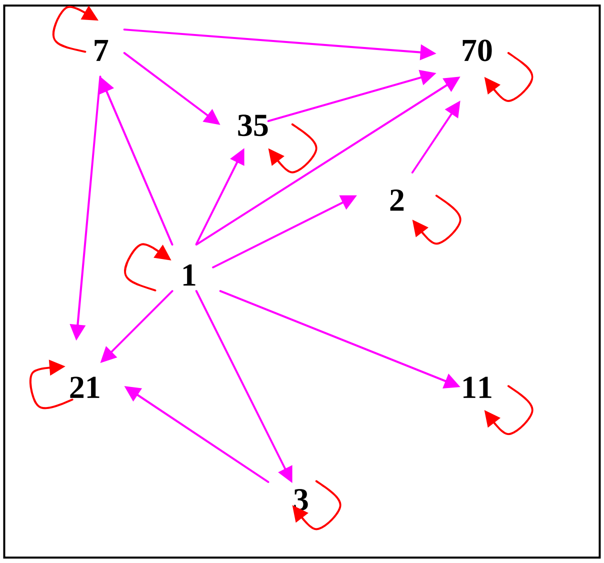
$$C=\frac{34}{5}\div\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{8}\right)$$
$$C=\frac{34}{5}\div\left(\frac{32}{40}-\frac{15}{40}\right)$$
$$C=\frac{34}{5}\div\frac{32-15}{40}$$
$$C=\frac{34}{5}\div\frac{17}{40}$$
$$C=\frac{34}{5}\times\frac{40}{17}$$
$$C=\frac{2\times17\times5\times8}{5\times17}$$
$$C=16$$

$D=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)$ $D=\frac{9}{4}+\frac{1\times5}{3\times2}$ $D=\frac{9}{4}+\frac{5}{6}$ $D=\frac{54}{24}+\frac{20}{24}$ $D=\frac{54+20}{24}$ $D=\frac{74}{24}$ $D=\frac{37}{12}$	$E=\dfrac{\frac{7}{5}\times\frac{-25}{9}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{6}}$ $E=\dfrac{-\frac{7\times5\times5}{5\times9}}{\frac{12}{30}-\frac{5}{30}}$ $E=\dfrac{-\frac{35}{9}}{\frac{7}{30}}$ $E=-\frac{35}{9}\div\frac{7}{30}$ $E=-\frac{35}{9}\times\frac{30}{7}$ $E=-\frac{7\times5\times3\times10}{3\times3\times7}$ $E=-\frac{50}{3}$	$F=3-\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ $F=3-\dfrac{\frac{6}{6}-\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}{\frac{6}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$ $F=3-\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{6}}$ $F=3-\frac{5}{6}\div\frac{7}{6}$ $F=3-\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}$ $F=3-\frac{5}{7}$ $F=\frac{21-5}{7}$ $F=\frac{16}{7}$

<u>ACTIVITE 1:</u> 1) Diviseur / Multiple : Ne pas confondre !

a) Les flèches ont été oubliées: Dans chaque cadre, si a est un diviseur de b, alors tu dois indiquer la flèche de a vers b. Exemple: 2 est un diviseur de 4





b) Vrai ou faux ?

1. 3 est un diviseur de 43 Faux
2. 7 est un diviseur de 21 Vrai
3. 240 est un multiple de 24 Vrai
4. 1 est un multiple de 67 Faux
5. 31 024 est un multiple de 113 Faux
6. 45 est un multiple de 5 Vrai
7. 5 est un diviseur de 450 Vrai

2) Trouver les diviseurs

a) Ecris par ordre croissant la liste complète des nombres qui divisent:

- **105** : *Aide : Tu peux faire un tableau comme ci-dessous:*

1	3	5	7
105	35	21	**15**
$1 \times 105 = 105$	$3\times 35 = 105$	$5 \times 21 = 105$	**$7 \times 15 = 105$**

Les diviseurs de 105 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 15 ; 21 ; 35 ; 105

- **72**

1	**2**	**3**	**4**	**6**	**8**
72	**36**	**24**	**18**	**12**	**9**

Les diviseurs de 72 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 18 ; 24 ; 36 ; 72

- **48**

1	**2**	**3**	**4**	**6**
48	**24**	**16**	**12**	**8**

Les diviseurs de 48 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48

- **400**

1	**2**	**4**	**5**	**8**	**10**	**16**	**20**
400	**200**	**100**	**80**	**50**	**40**	**25**	**20**

Les diviseurs de 400 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 16 ; 20 ; 25 ; 40 ; 50 ; 80 ; 100 ; 200 ; 400

b) Complète:

7 101 est divisible par 9 , en effet, on peut écrire : 7 101 = $9 \times$ **789**
221 est divisible par 17 , en effet, on peut écrire : 221 = **17** $\times$ **13**
3 312 est divisible par 36 , en effet, on peut écrire : 3 312 = **36** $\times$ **92**
855 est divisible par 19, en effet, on peut écrire : 855 = **19** $\times$ **45**.

Exercice n°5 : Associe à chaque nombre de la colonne de gauche ses diviseurs situés dans la colonne de droite.

135 • ses diviseurs sont 9 ; 5 ; 3
56 • ses diviseurs sont 2 ; 4 ; 7
60 • ses diviseurs sont 2 ; 4 ; 5 ; 3
21 • ses diviseurs sont 7 ; 3
120 • ses diviseurs sont 2 ; 4 ; 5 ; 3

Exercice n°6 : Trouve un nombre entier qui soit : diviseur de 45 ; multiple de 5 et le plus grand possible, mais strictement inférieur à 45.

1	**3**	**5**
45	**15**	**9**

Le nombre est 15

Exercice n°7 : **1.** Ecris la liste des diviseurs de 35.

1	**5**
35	**7**

Les diviseurs de 35 sont : 1 ; 5 ; 7 ; 35

2. Ecris la liste des diviseurs de 42.

1	**2**	**3**	**6**
42	**21**	**14**	**7**

Les diviseurs de 42 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42

Exercice n°8 : Dans l'expression **$n^2 - n + 11$**, si on remplace n par n'importe quel nombre entier positif, obtient-on toujours un nombre ayant **exactement** deux diviseurs ? Fais des essais avec plusieurs nombres.

n	$n^2 - n + 11$	diviseurs	n	$n^2 - n + 11$	diviseurs
1	*11*	*11 et 1*	*8*	**67**	**67 et 1**
2	**13**	**13 et 1**	*9*	**83**	**83 et 1**
3	**17**	**17 et 1**	*10*	**101**	**101 et 1**
4	**23**	**23 et 1**	*11*	**121**	**121 ;11 et 1**
5	**31**	**31 et 1**	*12*	**143**	**143 ;13 ;11 et 1**
6	**41**	**41 et 1**	*13*	**167**	**167 et 1**
7	**53**	**53 et 1**	*14*	**193**	**193 et 1**

ACTIVITE 2: A- PGCD de deux nombres

- Ecris la liste des diviseurs de 45 :

1	**2**	**5**
45	**15**	**9**

Les diviseurs de 45 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45

- Ecris la liste des diviseurs de 30 :

1	**2**	**3**	**5**
30	**15**	**10**	**6**

Les diviseurs de 30 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30

- En déduire la liste des diviseurs communs aux nombres 30 et 45 : **1 ; 3 ; 5 ; 15**
- Quel est le plus grand diviseur de 30 et 45 ? : **15**

Ce nombre est appelé le Plus Grand Commun Diviseur à 30 et 45 ; on le note P.G.C.D. (30;45)

- Tous les nombres ont-ils un diviseur commun ? : **Oui, le diviseur 1**
- Détermine le DGCD des nombres 42 et 48 :

Liste des diviseurs de 42 :

1	**2**	**3**	**6**
42	**21**	**14**	**7**

Les diviseurs de 42 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42

Liste des diviseurs de 48 :

1	**2**	**3**	**4**	**6**
48	**24**	**16**	**12**	**8**

Les diviseurs de 48 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48

PGCD (42 ; 48) = 6

B – Nombres premiers entre eux.

- Ecris la liste des diviseurs de 16 :

1	**2**	**4**
16	**8**	**4**

Les diviseurs de 16 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16

- Ecris la liste des diviseurs de 81 :

1	**3**	**9**
81	**27**	**9**

Les diviseurs de 81 sont : 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81

- En déduire le PGCD des nombres 16 et 81 : **PGCD (81 ; 16) = 1**

Si deux nombres ont pour P.G.C.D. le nombre 1, on dit qu'ils sont premiers entre eux.

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
A) 2 est le P.G.C.D. de 8 et 20 : **Faux car PGCD (8 ; 20) = 4**
B) 5 est le P.G.C.D. de 5 et 15 : **Vraie**
C) 1 est le P.G.C.D. de 7 et 13 : **Vraie**
D) 6 est le P.G.C.D. de 12 et 18 : **Vraie**
E) 6 est le P.G.C.D. de 12 et 24 : **Faux car PGCD (24 ; 12) = 12**

Exercice n°9 :

1. Ecris la liste des diviseurs de 20

1	**2**	**4**
20	**10**	**5**

Les diviseurs de 20 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20

2. Ecris la liste des diviseurs de 60.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
60	**30**	**20**	**15**	**12**	**10**

Les diviseurs de 60 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60

3. Etablir la liste des diviseurs communs à 20 et à 60 : **1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; $\boxed{20}$**
4. En déduire PGCD (20 ; 60). **PGCD (20 ; 60) = 20**

Exercice n°10 :

1. Ecris la liste des diviseurs de 49

1	**7**
49	**7**

Les diviseurs de 49 sont : 1 ; 7 ; 49

2. Ecris la liste des diviseurs de 56.

1	**2**	**4**	**7**
56	**28**	**14**	**8**

Les diviseurs de 56 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56

3. Etablir la liste des diviseurs communs à 49 et à 56 : **1 ; $\boxed{7}$**
4. En déduire PGCD (49 ; 56). **PGCD (49 ; 56) = 7**

Exercice n°11 : Dans chacun des cas suivants, détermine le PGCD des deux nombres proposés et en déduire s'ils sont premiers entre eux .

a) 28 et 75

Liste des diviseurs de 28

1	**2**	**4**
28	**14**	**7**

Les diviseurs de 28 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28

Liste des diviseurs de 75.

1	**3**	**5**
75	**25**	**15**

Les diviseurs de 75 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 25 ; 75
Liste des diviseurs communs à 28 et à 75 : $\boxed{1}$
PGCD (28 ; 75). **PGCD (28 ; 75) = 1** **28 et 75 sont donc deux nombres premiers entre eux.**

b) 20 et 63
Liste des diviseurs de 20

1	**2**	**4**
20	**10**	**5**

Les diviseurs de 20 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20

Liste des diviseurs de 63.

1	**3**	**7**
63	**21**	**9**

Les diviseurs de 63 sont : 1 ; 3 ; 7 ; 9 ; 21 ; 63

Liste des diviseurs communs à 20 et à 63 : $\boxed{1}$

PGCD (20 ; 63). **PGCD (20 ; 63) = 1** **<u>20 et 63 sont donc deux nombres premiers entre eux.</u>**

c) 49 et 70.

Liste des diviseurs de 49

1	**7**
49	**7**

Les diviseurs de 49 sont : 1 ; 7 ; 49

Liste des diviseurs de 70.

1	**2**	**5**	**7**		
70	**35**	**14**	**10**		

Les diviseurs de 70 sont : 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 10 ; 14 ; 35 ; 70

Liste des diviseurs communs à 49 et à 70 : **1 ;** $\boxed{7}$

PGCD (49 ; 70). **PGCD (49 ; 70) = 7** **<u>49 et 70 ne sont donc pas premiers entre eux.</u>**

<u>ACTIVITE 3:</u> <u>Algorithme des différences</u>

Dresser la liste des diviseurs de deux nombres pour trouver le P.G.C.D. n'est pas toujours performante surtout avec de grands nombres. Il existe plusieurs algorithmes.

1°) Les diviseurs de 30 :

1	**2**	**3**
30	**15**	**10**

Les diviseurs de 30 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 10 ; 15 ; 30

Les diviseurs de 18 :

1	**2**	**3**
18	**9**	**6**

Les diviseurs de 18 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18

Les diviseurs communs à 30 et 18 sont : **1 ; 2 ; 3**

Vérifions que chacun de ces nombres est diviseur de (30 - 18) 30 – 18 = 12

On a : 12 : 1 = 12 ; 12 : 2 = 8 ; 12 : 3 = 4

2°) Liste des diviseurs de 21.

1	**3**
21	**7**

Les diviseurs de 21 sont : 1 ; 3 ; 7 ; 21

Liste des diviseurs de 49.

1	**7**
49	**7**

Les diviseurs de 49 sont : 1 ; 7 ; 49

Les diviseurs communs à 21 et 49 : **1 et 7**

Vérifions que chacun de ces nombres est diviseur de (49 - 21) 49 – 21 = 28

On a : 28 : 1 = 28 ; 28 : 7 = 4

3°) D’une manière générale:

> Si d est un diviseur de a et de b alors d **est diviseur de b et de (a - b) avec $a > b$**
>
> **On admet que: PGCD (a , b) = PGCD (b ; a - b) avec $a > b$**

4°) Un exemple simple pour comprendre comment fonctionne l’algorithme des soustractions successives (des différences):

Déterminons le PGCD de 84 et de 63.

Explications

PGCD (84 ; 63) = PGCD (63 ; **21**.)

PGCD. (63 ; **21**) = PGCD (**42** ; **21**)

PGCD (**42** ; **21**) = PGCD (**21** ; **21**)

Conclusion : PGCD (84 ; 63) = 21

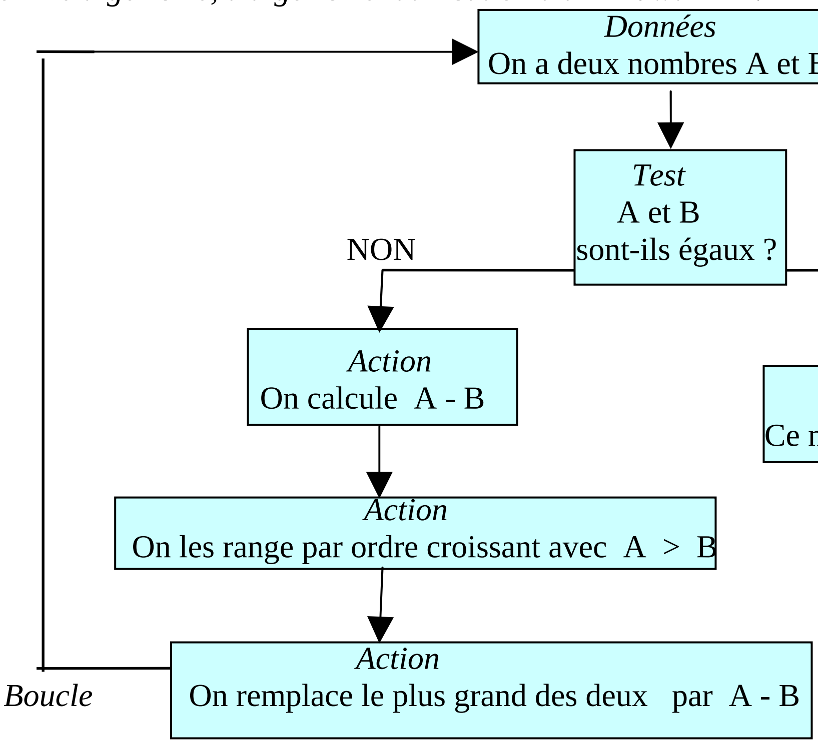
Mise en forme de tableau

a	*b*	*a - b*
84	63	21
63	21	42
21	42	21
21	21	0

5°) Que signifie le mot algorithme

D'après le Larousse: Ensemble de règles opératoires permettant de résoudre un problème avec un nombre fini d'opérations

D'ou vient ce mot ?: Muhammad ibn Musa al-Khuwârizmi a écrit le premier ouvrage en langue arabe présentant la numération indienne de position au 9e siècle. C'est par cet ouvrage que le calcul indien pénétra dans l'Occident chrétien. Maintes fois traduit en latin à partir de 12e siècle, sa célébrité fût telle que ce calcul fut nommé algorisme, d'algorisme latinisation d'al-Khuwârizmi.



Exercice n°12: Pour chacun des cas, détermine le PGCD de n et de d par la méthode des soustractions successives.

a) n = 240 et d = 148

PGCD (240 ; 148) = PGCD (92 ; 148)
PGCD (148 ; 92) = PGCD (56 ; 92)
PGCD (92 ; 56) = PGCD (36 ; 56)
PGCD (56 ; 36) = PGCD (20 ; 36)
PGCD (36 ; 20) = PGCD (16 ; 20)
PGCD (20 ; 16) = PGCD (4 ; 16)
PGCD (16 ; 4) = PGCD (4 ; 12)
PGCD (12 ; 4) = PGCD (8 ; 4)
PGCD (8 ; 4) = PGCD (4 ; 4)

Conclusion : PGCD (240 ; 148) = 4

b) n = 1 224 et d = 936

PGCD (1224 ; 936) = PGCD (288 ; 936)
PGCD (936 ; 288) = PGCD (648 ; 288)
PGCD (648 ; 288) = PGCD (360 ; 288)
PGCD (360 ; 288) = PGCD (72 ; 288)
PGCD (288 ; 72) = PGCD (216 ; 72)
PGCD (216 ; 72) = PGCD (144 ; 72)
PGCD (144 ; 72) = PGCD (72 ; 72)

Conclusion : PGCD (1224 ; 936) = 72

c) n = 561 et d = 935

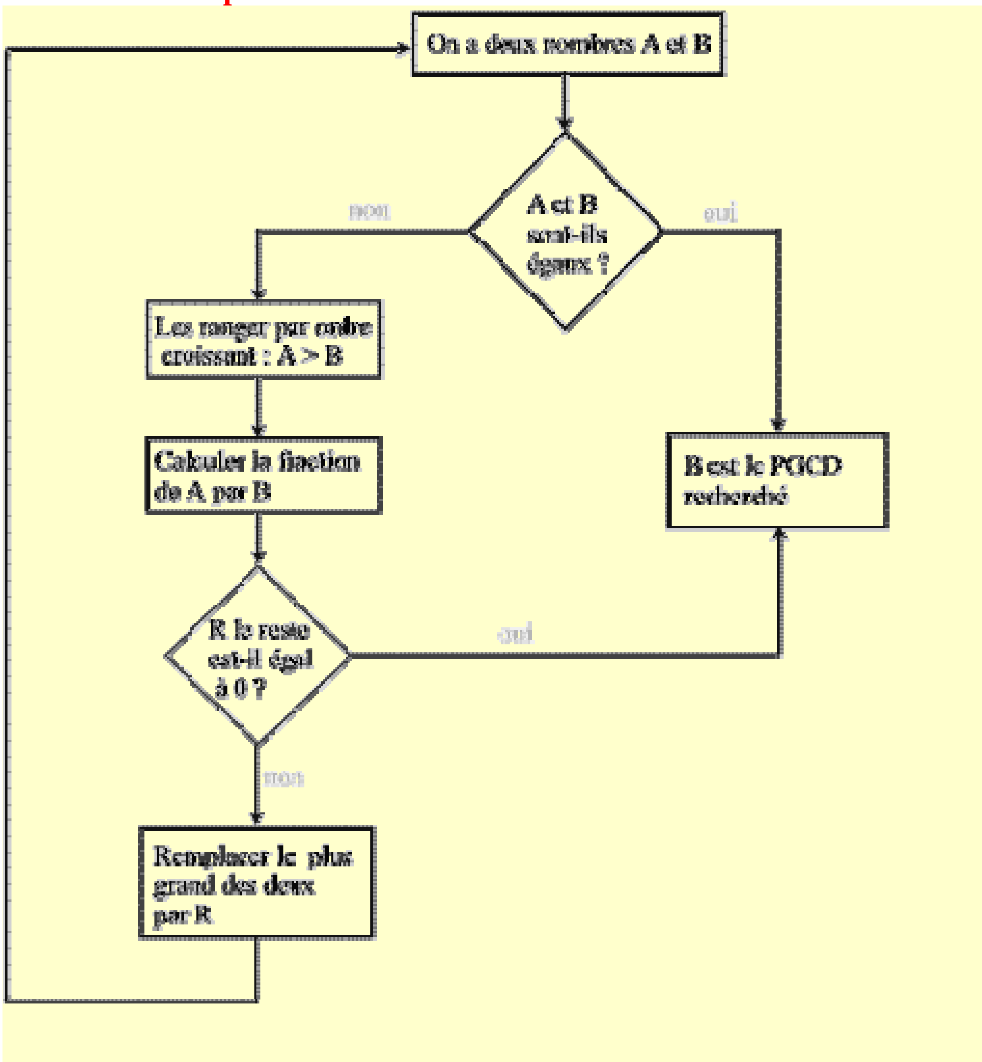
PGCD (935 ; 561) = PGCD (374 ; 561)
PGCD (561 ; 374) = PGCD (187 ; 374)

d) n = 441 et d = 777

PGCD (777 ; 441) = PGCD (336 ; 441)
PGCD (441 ; 336) = PGCD (336 ; 105)

PGCD (374 ; 187) = PGCD (187 ; 187) Conclusion : PGCD (935 ; 561) = 187	PGCD (336 ; 105) = PGCD (231 ; 105) PGCD (231 ; 105) =PGCD (126 ; 105) PGCD (126 ; 105) = PGCD (21 ; 105) PGCD (105 ; 21) = PGCD (84 ; 21) PGCD (84 ; 21) = PGCD (63 ; 21) PGCD (63 ; 21) = PGCD (42 ; 21) PGCD (42 ; 21) = PGCD (21 ; 21) Conclusion : PGCD (777 ; 441) = 21

<u>ACTIVITE 4:</u> Calcul du PGCD par divisions successives : ALGORYTHME D'EUCLIDE

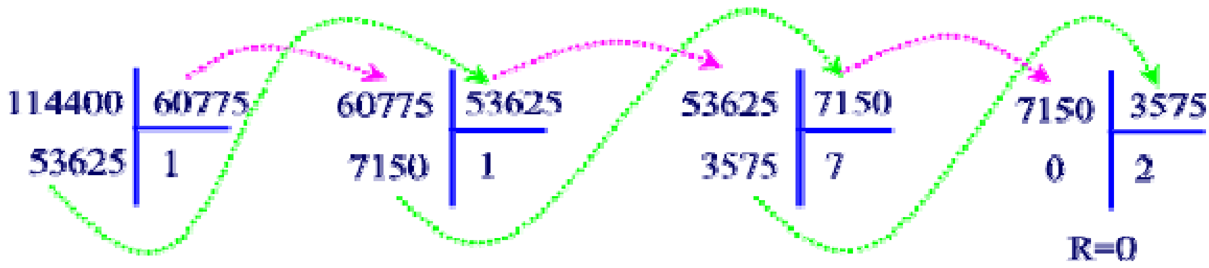


<u>Exemple:</u> **Calcul du PGCD de 114 400 et 60 775 .**

La méthode s'appuie sur le fait qu'un diviseur commun à 114 400 et 60 775 est aussi un diviseur commun de 60 775 et au reste (53 625) de la division de 114 400 et 60 775.
On remplace donc le PGCD de 114 400 et 60 775 par la recherche du PGCD deux nombres plus petits 60 775 et 53 625.
On recommence le même procédé de division avec ces deux nouveaux nombres.
On s'arrête quand on obtient un reste nul, c'est-à-dire lorsque l'un des nombres est multiple de l'autre.
Complète:

		dividende	diviseur	quotient	reste
PGCD(114 400 ; 60 775) = PGCD(60 775 ; **53 625**)		114 400 =	60775 ×	1	**+ 5 3625**
PGCD(60 775 ; **53 625**) = PGCD(**53 625** ; **7 150**)		**60 775**	**53 625**	**1**	**+ 7 150**
PGCD(**53 625** ; **7 150**) = PGCD(**7 150**; **3 575**)		**53 625**	**7 150**	**7**	**+ 3575**
PGCD(**7 150**; **3 575**) = PGCD(**3 575** ; **0**)		**7 150**	**3 575**	**2**	**0**

<u>Conclusion:</u> **PGCD (114 400 ; 60 775) = 3 7575**



PGCD = 3575

Exercice n°13 : Calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide :

a) 87 et 232

282	87	87	58	58	29
58	2	**29**	1	0	2

PGCD (232 ; 87) = 29

b) 295 et 177

295	177	177	118	118	59
118	1	**59**	1	0	2

PGCD (295 ; 177) = 59

c) 1592 et 784

1 592	784	784	24	24	16	16	8
24	2	16	32	**8**	1	0	2

PGCD (1 592 ; 784) = 8

Exercice n°14 :

a) Calcule du PGCD de 138 et de 63 par la méthode des soustractions successives :

PGCD (138 ; 63) = PGCD (75 ; 63)
PGCD (75 ; 63) = PGCD (63 ; 12)
PGCD (63 ; 12) = PGCD (51 ; 12)
PGCD (51 ; 12) = PGCD (39 ; 12)
PGCD (39 ; 12) = PGCD (27 ; 12)
PGCD (27 ; 12) = PGCD (15 ; 12)
PGCD (15 ; 12) =PGCD (3 ; 12)
PGCD (12 ; 3) =PGCD (9 ; 3)
PGCD (9 ; 3) = PGCD (6 ; 3)
PGCD (6 ; 3) = PGCD (3 ; 3)

Conclusion : PGCD (138 ; 63) = 3

b) Avec la méthode d'Euclide.

138	63	63	12	12	3
12	2	**3**	5	0	4

PGCD (138 ; 63) = 3

c) La méthode d'Euclide est plus rapide.

Exercice n°15 :

a) Détermine tous les diviseurs communs de 48 et 60, puis déduis-en leur PGCD.

Liste des diviseurs de 48

1	**2**	**3**	**4**	**6**
48	**24**	**16**	**12**	**8**

Les diviseurs de 48 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48

Liste des diviseurs de 60.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
60	**30**	**20**	**15**	**12**	**10**

Les diviseurs de 60 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60

Les diviseurs communs à 48 et 60 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12

b) Vérifie avec l'algorithme d'Euclide.

60 | 48
12 | 1

48 | 12
0 | 4

PGCD (60 . 48) = 12

c) trouve deux nombres dont le PGCD est 36, en expliquant ta méthode.
On a : 36 2 = 72 et 36 3 = 108
108 et 72 sont 2 nombre dont le PGCD est 36

d) Le PGCD de deux nombres est 54. Le plus grand des deux nombres est 378. Quel peut être l'autre nombre ?
Si le PGCD est 54, alors 378 est divisible par 54. Soit 378 : 54 = 7
L'autre nombre est donc 324 car 6 × 54 = 324.
<u>Autre méthode :</u> PGCD (378 ; 378 – 54) = PGCD (378 ; 324)
Le deuxième nombre est 324

<u>Exercice n°16 :</u> Les nombres suivants sont-ils premiers entre eux ?
a) 519 et 135 ;
Les nombres 519 et 135 sont des multiples de 3 (5 + 1 + 9 = 15 et 1 + 3 + 5 = 9) donc ils sont divisibles par 3.
Le PGCD étant donc différent de 1, les nombres 519 et 135 ne sont pas premiers entre eux.

b) 4 165 et 702 ;

4 165 | 702
655 | 5

702 | 655
47 | 1

655 | 47
44 | 3

47 | 44
3 | 1

44 | 3
2 | 14

13 | 2
1 | 6

2 | 1
0 | 2

Comme PGCD (4 165 ; 702) = 1, alors les nombres 4 165 et 702 sont premiers entre eux.

c) 437 et 322 ;

437 | 322
115 | 1

322 | 115
92 | 2

115 | 92
23 | 1

92 | 23
0 | 4

Comme PGCD (2437 ; 322) = 23, alors les nombres 437 et 322 ne sont pas premiers entre eux.

d) 493 et 376.

493 | 376
117 | 1

376 | 117
142 | 2

142 | 117
25 | 1

117 | 25
17 | 4

25 | 17
8 | 1

17 | 8
1 | 2

8 | 1
0 | 8

Comme PGCD (493 ; 376) = 1, alors les nombres 493 et 376 sont premiers entre eux.

Exercice n°17 : Explique si les fractions suivantes sont irréductibles ou pas :

a) $\frac{18}{25}$.

$\begin{array}{r|l} 25 & 18 \\ \cline{2-2} 7 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$

Comme PGCD (25 ; 18) = 1, alors les nombres 25 et 18 sont premiers entre eux et ainsi la fraction est irréductible.

b) $\frac{535}{75}$. Les nombres 535 et 75 se terminent par 5 donc il sont divisibles par 5.

Le PGCD étant donc différent de 1, les nombres 535 et 75 ne sont pas premiers entre eux et ainsi la fraction n'est pas irréductible.

c) $\frac{935}{274}$.

$\begin{array}{r|l} 935 & 274 \\ \cline{2-2} 113 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 274 & 113 \\ \cline{2-2} 48 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 113 & 48 \\ \cline{2-2} 17 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 48 & 17 \\ \cline{2-2} 14 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 17 & 14 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$

Comme PGCD (935 ; 274) = 1, alors les nombres 935 et 274 sont premiers entre eux et ainsi la fraction est irréductible.

d) $\frac{963}{11}$.

$\begin{array}{r|l} 963 & 11 \\ \cline{2-2} 6 & 87 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 11 & 6 \\ \cline{2-2} 5 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 6 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 5 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$

Comme PGCD (963 ; 11) = 1, alors les nombres 963 et 11 sont premiers entre eux et ainsi la fraction irréductible.

e) $\frac{1\,092}{8\,177}$.

$\begin{array}{r|l} 8\,177 & 1092 \\ \cline{2-2} 533 & 7 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1\,092 & 533 \\ \cline{2-2} 26 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 533 & 26 \\ \cline{2-2} 13 & 20 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 26 & 13 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$

Comme PGCD (8 177 ; 1 092) = 13, alors les nombres 8 177 et 1 092 ne sont pas premiers entre eux et ainsi la fraction n'est pas irréductible.

f) $\frac{1\,793}{872}$

$\begin{array}{r|l} 1\,793 & 872 \\ \cline{2-2} 49 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 872 & 49 \\ \cline{2-2} 39 & 17 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 49 & 39 \\ \cline{2-2} 10 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 39 & 10 \\ \cline{2-2} 9 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 10 & 9 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 9 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$

Comme PGCD (1 793 ; 872) = 1, alors les nombres 1 793 et 872 sont premiers entre eux et ainsi la fraction est irréductible.

Exercice n°18 : Ecris ces fractions sous forme irréductible, quand c'est possible :

a) $\frac{609}{465}$

$\begin{array}{r|l} 609 & \underline{465} \\ 144 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 465 & \underline{144} \\ 33 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 144 & \underline{33} \\ 12 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 33 & \underline{12} \\ 9 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 12 & \underline{9} \\ 3 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{3} \\ 0 & 3 \end{array}$

Comme PGCD (609 ; 465) = 3, alors : $\frac{609}{465} = \frac{203 \times 3}{155 \times 3} = \frac{203}{155}$

b) $\frac{171}{122}$

$\begin{array}{r|l} 171 & \underline{122} \\ 49 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 122 & \underline{49} \\ 24 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 49 & \underline{24} \\ 1 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 24 & \underline{1} \\ 0 & 1 \end{array}$

Comme PGCD (171 ; 122) = 1, alors la fraction est déjà irréductible.

c) $\frac{102}{141}$

$\begin{array}{r|l} 141 & \underline{102} \\ 39 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 102 & \underline{39} \\ 24 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 39 & \underline{24} \\ 15 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 24 & \underline{15} \\ 9 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 15 & \underline{9} \\ 6 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{6} \\ 3 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 6 & \underline{3} \\ 0 & 2 \end{array}$

Comme PGCD (141 ; 102) = 3, alors : $\frac{102}{141} = \frac{3 \times 34}{3 \times 47} = \frac{34}{47}$

d) $\frac{221}{255}$.

$\begin{array}{r|l} 255 & \underline{221} \\ 34 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 221 & \underline{34} \\ 17 & 6 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 34 & \underline{17} \\ 0 & 2 \end{array}$

Comme PGCD (255 ; 221) = 17 , alors : $\frac{221}{255} = \frac{17 \times 13}{17 \times 15} = \frac{13}{15}$

SUJETS BREVET

Exercice n°19 :

1. Les nombres 682 et 496 sont-ils premiers entre eux ? Justifier

Les nombres 682 et 496 sont paires donc divisibles par 2.
Le PGCD étant donc différent de 1, les nombres 682 et 496 ne sont donc pas premiers entre eux.

2. Calculer le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de 682 et de 496.

$\begin{array}{r|l} 682 & \underline{496} \\ 186 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 496 & \underline{186} \\ 124 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 186 & \underline{124} \\ \mathbf{62} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 124 & \underline{62} \\ 0 & 2 \end{array}$

PGCD (682 ; 496) = 62

3. Simplifier la fraction $\frac{682}{496}$ pour a rendre irréductible, en indiquant la méthode.

On a : $682 = 62 \times 11$ et $496 = 62 \times 8$

D'où : $\frac{682}{496} = \frac{62 \times 11}{62 \times 8} = \frac{11}{8}$

Exercice n°20 :

1. Calcul du PGCD de 540 et 300 en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$\begin{array}{r|l} 540 & \underline{300} \\ 240 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 300 & \underline{240} \\ \mathbf{60} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 240 & \underline{60} \\ 0 & 4 \end{array}$

La dernier reste non nul est 60

PGCD (540 ; 300) = 60

2. Une pièce rectangulaire de 5,40 m de long et de 3 m de large est recouverte, sans découpe, par des dalles
de moquette carrées, toutes identiques.

a) Mesure du côté de chacune de ces dalles sachant que l'on veut le moins de dalles possibles.

D'après la question précédente, la mesure du côté de chacune de ces dalles est de **60 cm.**

b) Calcul du nombre de dalles utilisées.

On a : $540 : 60 = 9$ et $300 : 60 = 5$

Donc, si n est le nombre de dalles, on a : $n = 9 \times 5 = 45$.

Conclusion : Le nombre de dalles utilisées est 45 .

Exercice n°21 :

1. Calcul du PGCD de 280 et 315 en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$\begin{array}{r|l} 315 & \underline{280} \\ \mathbf{35} & 1 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 280 & \underline{35} \\ 0 & 8 \end{array}$

PGCD (315 ; 280) = 35

2. Le sol d'une pièce rectangulaire a pour dimensions 280 cm et 315 cm.
On veut recouvrir entièrement de dalles carrées identiques dont le côté est un nombre entier de centimètres, sans faire de découpe.

a) Détermination de la longueur du côté de la plus grande dalle possible.

D'après la question précédente, la longueur du côté de la plus grand dalle est **35 cm.**

a) Calcul du nombre de dalles utilisées.

On a : $315 = 9 \times 35$ et $280 = 8 \times 35$

Donc, si n est le nombre de dalles, on a : $n = 9 \times 8 = 72$.

Conclusion : Il faut 72 dalles pour recouvrir toute la pièce.

Exercice n°22 : On considère la fraction : $\dfrac{170}{578}$.

1. Montrons que cette fraction n'est pas irréductible.

Les nombres 170 et 578 sont pairs donc divisibles par 2.

Le PGCD étant donc différent de 1, les nombres 170 et 578 ne sont pas premiers entre eux et ainsi la fraction n'est pas irréductible.

2. Déterminons le PGCD des nombres 170 et 578 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$\begin{array}{r|l} 578 & \underline{170} \\ 68 & 3 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 170 & \underline{68} \\ \mathbf{34} & 2 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 68 & \underline{34} \\ 0 & 2 \end{array}$

PGCD (578 ; 170) = 34

3. Ecriture de la fraction $\dfrac{170}{578}$ sous forme irréductible.

On a : $578 = 17 \times 34$ et $170 = 5 \times 34$

Donc : $\dfrac{170}{578} = \dfrac{5 \times 34}{17 \times 34} = \dfrac{5}{17}$

ACTIVITE 5 : « ***Les nombres*** »

A – Nature du nombre $\sqrt{2}$

1. a et b sont deux nombres entiers non nuls. Complète le tableau suivant :

Chiffre des unités de a (ou de b)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de a^2	**0**	**1**	**4**	**9**	**6**	**5**	**6**	**9**	**4**	**1**
Chiffre des unités de b^2	**0**	**1**	**4**	**9**	**6**	**5**	**6**	**9**	**4**	**1**
Chiffre des unités de $2 \times b^2$	**0**	**2**	**8**	**8**	**2**	**0**	**2**	**8**	**8**	**2**

2. Comment choisir les chiffres des unités de a et b pour que $a^2 = 2 \times b^2$? : uniquement 0

3. En déduire qu'il n'existe pas de nombres entiers a et b premiers entre eux tels que : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

On a $a^2 = 2 \times b^2$ ou encore $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ou encore $2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ ou encore $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

Or comme a et b se termine par 0 donc ils sont divisibles par 10 .Ainsi, Ils ne peuvent pas être premiers entre eux et il n'existe donc pas de nombres entiers a et b premiers entre eux tels que : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

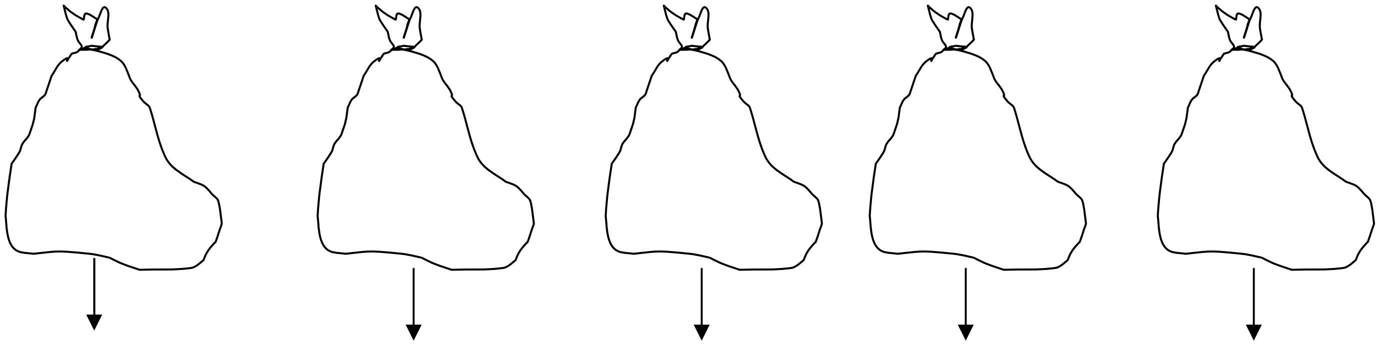
(le nombre $\sqrt{2}$ est **<u>irrationnel</u>**) :

B – <u>Les nombres</u>

Voici une liste de nombres :

$-4{,}75$; $\frac{7}{3}$; $\frac{14}{2}$; $\sqrt{2}$; 0 ; 4 ; -29 ; π ; $\frac{-12}{30}$; $10{,}728$; $\frac{-9}{11}$

Place chacun de ces nombres dans le ou les « bons sac »



Nombres entiers positifs | Nombres entiers relatifs | Nombre décimaux | Nombres pouvant s'écrire en écriture fractionnaire | Autres

<u>Exercice n°23 :</u> On considère les nombres suivants :

$\frac{9}{7}$; $\sqrt{10}$; $-5{,}5$; 11 ; 1001 ; -8 ; 2π ; $\frac{3}{2}$

Parmi ces nombres, quels sont ceux qui sont :

a) Des entiers naturels ? : 11 ; 1 001

b) Des entiers relatifs ? : 11 ; 1 001 ; ; - 8

c) Des nombres décimaux ? : 11 ; 1 001 ; - 5,5 ; - 8 .

d) Des nombres rationnels ? : 11 ; 1 001 ; - 5,5 ; - 8 ; $\frac{3}{2}$

e) Des nombres réels ? : $\frac{9}{7}$; $\sqrt{10}$; $-5{,}5$; 11 ; 1001 ; -8 ; 2π ; $\frac{3}{2}$

<u>Exercice n°24 :</u> Montre, par un calcul que le nombre :

$$A = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right) = 1 - \left(\frac{5}{20} + \frac{12}{20}\right) = \frac{20}{20} - \frac{17}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$ A = 0,15 est donc un nombre décimal ;

$$B = \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{15}}{\frac{6}{4} - 1} = \frac{\frac{9}{15} - \frac{2}{15}}{\frac{6}{4} - \frac{4}{4}} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{4}} = \frac{7}{15} : \frac{2}{4} = \frac{7}{15} \times \frac{4}{2} = \frac{7 \times 2 \times 2}{15 \times 2} = \frac{14}{15} (\approx 0{,}93333..)$$ B est donc un nombre rationnel

$$C = \frac{7}{2} + \frac{1}{3}\left(3 + \frac{15}{2}\right) = \frac{7}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{6}{2} + \frac{15}{2}\right) = \frac{7}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{21}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3 \times 7}{3 \times 2} = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

C=7 est donc un nombre entier naturel.